

ANÁLISIS DE DISEÑOS DE SERIES TEMPORALES MÚLTIPLES

**Guillermo Vallejo
José R. Escudero**

Departamento de Psicología
UNIVERSIDAD DE OVIEDO

RESUMEN

*El objetivo del presente trabajo consiste en desarrollar una solución analítica que facilita el manejo de tres problemas fundamentales que se presentan en la aplicación de diseños de series temporales interrumpidas: a) falta de adecuado grado de control sobre las amenazas a la validez interna (en particular del factor historia), b) la imposibilidad de utilizar estadísticos como la *t* de Student o el análisis de varianza de Fisher debido a la presencia de dependencia serial, y c) la dudosa generalización de los resultados obtenidos a partir de un único sujeto. La primera parte del trabajo describe de forma resumida y sencilla la técnica de las series temporales interrumpidas con una sola unidad de análisis y su generalización al análisis de series temporales con múltiples unidades. En la segunda parte se presenta un ejemplo que ilustra la técnica descrita utilizando los datos de una investigación realizada con dos grupos naturales.*

Palabras clave: SERIES TEMPORALES INTERRUMPIDAS, SERIES TEMPORALES MÚLTIPLES, ESTACIONARIEDAD, DEPENDENCIA SERIAL.

SUMMARY

The aim of the present paper consists of developing an analytical solution that facilitates the managing of three fundamental problems that are present in the application of interrupted time series designs: a) lack of adequate degree of control over the threats to internal validity (particularly the history factor), b) the impossibility of using statistics as the t of Student or the Fisher analysis of variance due to the serial dependency presence, and c) the doubtful generalization of the results obtained from a single case. The first part of the article describes in a summarized and simple way the technique of the interrupted time series with a single analysis unit and its generalization to the analysis of time series with multiple units. In the second part, an example that illustrates the technique that has been described is presented using the data of one investigation carried out with two natural groups.

Key words: INTERRUPTED TIME SERIES, MULTIPLE TIME SERIES, STATIONARITY, SERIAL DEPENDENCY.

1.- INTRODUCCIÓN

En la actualidad existe un amplio consenso entre los investigadores orientados hacia unos horizontes más prácticos y aplicadas en considerar a los diseños de series temporales interrumpidas, no sólo como los más utilizados, sino también entre los más poderosos diseños cuasi-experimentales de cuantos existen. Sin embargo, a nuestro juicio, de su empleo se derivan tres problemas fundamentales que ningún investigador debiera pasar por alto a la hora extraer inferencias. El primero es de carácter estrictamente metodológico y reside en el hecho de que al carecer de un principio básico similar al acto físico de la aleatorización (la correcta aplicación del citado principio implica conocer la probabilidad que tiene cada punto de la serie de asignarse a una u otra condición de tratamiento, dicho de otro modo, que el tratamiento pueda introducirse o retirarse aleatoriamente a lo largo de los diferentes puntos temporales) no existe un adecuado grado de control sobre algunas de las principales amenazas que atentan contra la validez interna y, muy en especial, del factor historia. Consecuentemente, uno puede formular la hipótesis rival de que el efecto del tratamiento puede deberse a la acción de otros eventos

que han ocurrido al mismo tiempo y que son de hecho los verdaderos responsables de los cambios observados. Cofitio es obvio, la posibilidad de que esta explicación rival prospere dependerá, en buena medida, de lo cuidadoso que sea el investigador a la hora de verificar la existencia de factores extraños, de lo complejo que sea el diseño que se elija y del número de puntuaciones que efectúe, este último aspecto determina críticamente la habilidad del investigador para captar la fuente de inestabilidad de los datos.

El segundo problema es de carácter estrictamente estadístico. Los procedimientos estadísticos tradicionales, tales como la prueba *t* de Student o el análisis de la varianza de Fisher, han jugado un importante papel durante bastantes décadas a la hora de estimar y probar cambios entre las medias de diferentes grupos. Sin embargo, como han resaltado Box y Tiao (1975), estas pruebas solamente son válidas si las observaciones registradas con anterioridad y con posterioridad al evento de interés varían en torno a las medias de las respectivas fases no sólo, normalmente y con variancia constante, sino también independientemente. Ahora bien, por lo general, los datos registrados sucesivamente a lo largo del tiempo carecen de la gracia -que habitualmente confiere la aleatorización, y son usualmente dependientes y frecuentemente no estacionarios. Consecuentemente, todos aquellos procedimientos estadísticos, tanto paramétricos como no paramétricos que requieran para su correcta aplicación el supuesto de independencia no deberían emplearse, pues la presencia de autocorrelación puede distorsionar sustancialmente los resultados de las pruebas que no la tienen en cuenta.

Durante bastantes años se ha operado como si la presencia de dependencia serial encontrada en los diseños de series temporales interrumpidas sólo tuviera -aplicaciones negativas para los análisis estadísticos convencionales, sobre todo, a raíz de que Scheff, (1959) pusiera de relieve cómo la presencia de correlación serial positiva convertía a la prueba de *F* en excesivamente liberal, mientras que la presencia de correlación serial negativa la volvía excesivamente conservadora, pero no para los clásicos análisis visuales, pues existía la creencia de que éstos eran más conservadores que los análisis estadísticos y, por ende, los analistas sólo responden a efectos de gran tamaño. No obstante, Matyas y Greenwood (1990), tras llevar a cabo varios experimentos y una exhaustiva revisión de la literatura existente en torno a la técnica de análisis visual, presentan datos originales en los que demuestran cómo la técnica del trauma ocular, alias acertadamente empleado por Kazdin (1984), además de no ser fiable, es en exceso liberal. En concreto, los autores citados descubrieron que los analistas visuales reivindicaban en numerosas

ocasiones intervenciones significativas cuando de-hecho no se habían producido; por el contrario, raramente fallaban en detectar efectos verdaderos, aunque el tamaño de tales efectos fuese relativamente modesto. Más aún, si la autocorrelación está presente en la serie temporal, los problemas con los que usualmente se encuentran los partidarios de los análisis visuales no sólo no permanecen estables, sino que la evidencia existente se ha encargado de poner de manifiesto que, generalmente, éstos se suelen acentuar (Matyas y Greenwood, 1990, 1991). Por consiguiente, este descubrimiento debilita enormemente la postura de aquellos investigadores que abogan por utilizar rutinariamente la técnica visual a la hora de evaluar el impacto ocasionado por una intervención planificada.

A raíz de las críticas surgidas con la aplicación rutinaria de las técnicas visuales y con los intentos de aplicación de las pruebas estadísticas convencionales, a lo largo de las dos últimas décadas han aparecido diversos métodos estadísticos tendentes a paliar los problemas reseñados. Con todo, debemos manifestar que la solución más prometedor y también más practicada en el campo de las ciencias socio-comportamentales ha consistido en la adaptación efectuada por Glass, Willson y Gottman (1975) de la técnica de las series temporales, desarrollada inicialmente por Box y Tiao (1965) y Box y Jenkins (1970). Este enfoque se basa en la adaptación e integración dentro de una teoría comprensiva del análisis espectral utilizado en las ciencias físicas con datos de carácter continuo al análisis de datos de corte longitudinal, pero de carácter discreto. En los trabajos de estos autores, además de presentarse las aportaciones más novedosas en torno al tratamiento estocástico de las series temporales, se propone una metodología que permite llegar a modelar adecuadamente la estructura que sigue la parte sistemática (parte responsable, de la dependencia serial) del componente estocástico de la serie bajo estudio. Modelamiento que se encuadra dentro de una clase paramétrica de procesos estocásticos lineales y discretos formados por los denominados autorregresivos, integrados y de medias móviles; procesos que reciben el nombre genérico de modelos ARIMA.

El tercero es de carácter epistemológico, ya que se trata del problema de la inducción y de la evaluación de la generalidad. Nos podemos preguntar "¿hasta que punto los resultados experimentales obtenidos con un único sujeto son representativos de los logrados con otros sujetos?". Nosotros, al igual que para Cowles (1989), pensamos que la representatividad es un asunto de carácter conductual más que lógico y, por tanto, es un problema de constatar hechos; es decir, se trataría de añadir vigor al rigor mediante algún programa de

replicación sistemática. Para ello, en vez de efectuar réplicas adicionales mediante diseños de series temporales simples podemos utilizar diseños transversales, como por ejemplo, el series temporales interrumpidas con repeticiones intercambiadas.

A raíz de lo dicho, el propósito del presente artículo consiste en desarrollar una solución analítica que, en nuestra opinión, facilita en gran medida el manejo de los problemas planteados. Para ello se hacen dos cosas muy concretas: Por un lado, describir de forma resumida y sencilla la técnica de las series temporales interrumpidas con una sola unidad de análisis y su generalización al análisis de series temporales con múltiples unidades. Y, por otro lado, ilustrar la técnica descrita utilizando los datos de la investigación realizada con dos grupos naturales por Komaki, Barwick y Scott (1978).

2.- ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES

Supongamos que las respuestas emitidas a lo largo del tiempo por una simple unidad de análisis sean adecuadamente explicadas mediante la relación lineal de $k-1$ variables predictoras, más un término de error que recoja el efecto conjunto de otras variables no directamente implicadas en el modelo y cuyo efecto no resulte relevante. Formalmente,

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_{k-1} X_{k-1,t} + \varepsilon_t$$

donde y_t es la puntuación dada a la respuesta medida en el tiempo t , β_0 es el interceptor del proceso, $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ son los parámetros del modelo, $X_{k-1,t}, \dots, X_{1,t}$ son los valores de las variables X en el tiempo t y ε_t es el error del proceso en el tiempo t .

Para proceder a la estimación de los parámetros de la ecuación anterior, hemos de establecer algunos supuestos sobre el modo en que se han obtenido las observaciones. Estos supuestos son decisivos en el proceso de estimación, y en lo referente a los errores, el conjunto más simple es el que sigue:

- a) Los errores de la población se distribuyen de acuerdo a una ley normal.
- b) La media del término de error es nula y la varianza constante para todas las observaciones.
- c) No existe correlación entre los errores correspondientes a observaciones diferentes.

En la práctica, la hipótesis nula referida a la distribución normal de los residuales con media cero y varianza constante suele ser rechazada, bien sea porque la serie resulte no estacionaria, o bien sea porque la serie presente dependencia serial. Desafortunadamente, verificar si la serie es o no estacionaria requiere que las observaciones sean independientes, mientras que para identificar el modelo de dependencia se requiere que la serie sea estacionaria.

2.1.- Estacionariedad

Aunque existen muchos tipos de estacionariedad (véase Vallejo, 1996) para nuestros propósitos, asumiendo que las series constituyen realizaciones de procesos normales, es suficiente con que nos centremos en el comportamiento que exhiben las medias y las varianzas a lo largo del tiempo. Un proceso estacionario en sentido amplio o de segundo orden es aquel que tiene medias y varianzas constantes. De este modo, una serie puede ser estacionaria, no estacionaria en la media, no estacionaria en la varianza, o no estacionaria ni en la media ni en la varianza.

En la práctica, lo sensato es esperar que la serie muestre alguna tendencia o inclinación a lo largo del tiempo. Esto plantea dos problemas al investigador, por un lado, determinar si está presente en la serie alguna forma de variación y, por otro lado, proceder bien a su extracción o bien a su modelamiento. Para averiguar si el proceso muestra una tendencia creciente o decreciente suele ser suficiente con la mera inspección visual de la serie, no obstante, esta operación puede complementarse con la división de la serie temporal en dos segmentos de igual longitud, las dos series resultantes deben tener el mismo nivel, de no ser así la serie se desplaza o presenta tendencia y, por tanto, no se puede mantener que la media sea constante para todo t . La solución más practicada para tratar la no estacionariedad en la media consiste en proceder a la extracción de la tendencia efectuando las oportunas diferenciaciones en la serie hasta que presente un nivel constante a lo largo de su curso.

El procedimiento más utilizado para estabilizar la varianza consiste en tomar logaritmos neperianos de cada una de las puntuaciones de la serie original. No obstante, cabe resaltar, que en ocasiones la variabilidad aumenta con el nivel de la serie; esto es, la media y la varianza son proporcionales. En estos casos, lo sensato es diferenciar la serie modificada previamente mediante

la transformación raíz cuadrada. En otras ocasiones la relación la podemos encontrar entre el cuadrado de las medias y las desviaciones típicas, etc. En resumen, cuando la desviación estándar de una serie temporal y alguna potencia de la media mantengan entre sí algún tipo de relación, lo más frecuente es que la serie sea convertida en estacionaria a través de alguna de las transformaciones instantáneas propuestas por Box y Cox (1964, 1982), usualmente la logarítmica, y la diferenciación. De obviarse, la posible no estacionariedad en la varianza el analista efectuar probablemente inferencias incorrectas acerca del proceso temporal.

Otra solución que también está disponible a la hora de remover las variaciones de carácter secular consiste en incorporar a la ecuación de regresión estos términos como variables explicativas adicionales (tendencia lineal, cuadrática, etc). Un problema con la modelización de las tendencias es que los parámetros asociados con ellas son excesivamente sensibles a la presencia de puntuaciones extremas, cuestión que se manifiesta con menor intensidad cuando se diferencia la secuencia de observaciones. Con todo, algunos autores (Chou 1974; Manly, 1992; Judd y Kenny, 1981), prefieren la incorporación de variables aproximadas (proxy variables) en la ecuación de regresión a la diferenciación, pues piensan, y no carecen de razones para ello, que la última operación puede introducir autocorrelación en aquellas series que si bien carecen de estacionariedad no adolecen de independencia serial. Además, la incorporación de las tendencias dentro de la ecuación permite que sus efectos sean medidos, probados e interpretados.

Una vez que hemos logrado que la serie sea estacionaria en sentido amplio, pueden ocurrirnos dos cosas: Una que los residuales del modelo de regresión están distribuidos normal e independientemente con media cero y varianza constante; esto es, que describan un proceso de ruido blanco. Si los residuales se comportan de acuerdo a las características aludidas, los parámetros del modelo puedan estimarse mediante la regresión mínimo cuadrática ordinaria regresando y_t sobre X_t .

Otra que los residuales sean estacionarios, pero mutuamente dependientes. En este caso el investigador debe dirigir sus esfuerzos a descubrir el modelo de dependencia serial. Para ello tan sólo se requiere comparar el comportamiento empírico de las claves estadísticas función de autocorrelación (FAC) y función de autocorrelación parcial (FACP) con el comportamiento teórico que las mismas exhiben bajo los más diversos modelos de dependencia.

2.2.- Estimación de los parámetros del modelo

Cuando de un conjunto de datos registrados a lo largo del tiempo se han eliminado o en su defecto modelado, tanto los componentes seculares como los componentes estacionales, la mera identificación del proceso de dependencia serial no permite aplicar sin más el modelo lineal general, pues los residuales de la serie aún no son independientes. Así pues, antes de proceder a estimar la magnitud del impacto de tratamiento, necesitamos filtrar la serie para remover la autocorrelación de los errores o residuales. No obstante, remover la dependencia serial de los residuales requiere conocer el valor de los parámetros del modelo, aspecto éste difícil de satisfacer, salvo en investigaciones de simulación, por lo que en la práctica debemos proceder a su estimación.

Para la estimación de los parámetros de procesos autorregresivos de orden p [$AR(p)$], de medias móviles de orden q [$MA(q)$], o autorregresivos y de medias móviles de órdenes p, q [$ARMA(p, q)$] se requiere que la serie de N elementos ($t = 1, \dots, N$) sea estacionaria. Esto es, el proceso debe contener sólo inercia y por ello debe de estar libre de tendencias, inclinaciones y variaciones estacionales. Por este motivo, si el modelo especificado implica, además de los referidos $AR(p)$, $MA(q)$ o $ARMA(p, q)$, algún proceso integrado, por ejemplo una tendencia lineal, los coeficientes son estimados desde los residuales obtenidos tras la oportuna diferenciación de la serie, o bien utilizando los residuales que se obtengan tras la adecuada modelización de la tendencia.

Básicamente, los parámetros pueden ser estimados a través de uno de los métodos siguientes: el método de los momentos, el método de los mínimos cuadrados no lineales y el método de la máxima verosimilitud. El método de los momentos es el procedimiento más simple para la estimación de los parámetros de los procesos autorregresivos, ϕ_p ; sin embargo, el mismo puede convertirse en extremadamente complicado a la hora de obtener estimaciones de los coeficientes de promedio móvil, θ_q . El problema con la estimación de estos coeficientes surge con la condición de invertibilidad. En esencia, dicha condición lo que hace es constreñir el rango de valores que pueden tomar los parámetros de modo que el proceso identificado sea verosímil. Por ejemplo, sería conceptualmente inaceptable que la puntuación observada en el tiempo t , y_t , estuviera más afectada por lo acaecido en el tiempo y_{t-15} , que por lo sucedido en el tiempo y_{t-1} . A su vez, el método de los mínimos cuadrados no lineales no presenta especiales problemas a la hora de estimar los parámetros

ϕ_p Y θ_q . Sin embargo, tiene dos pequeñas limitaciones. La primera, que no utiliza toda la información disponible para una estimación más exacta. La segunda está relacionada con la minimización de funciones bajo el enfoque condicional (se trata de encontrar unos parámetros condicionados a unos valores dados inicialmente). Vallejo (1996), efectúa una exposición detallada de este procedimiento de estimación, sobre todo, de la estimación de los modelos $MA(q)$ y $ARMA(p,q)$ bajo el enfoque condicional.

Finalmente, si se utilizan las hipótesis acerca de la distribución probabilística de, ϵ , la estimación se puede efectuar con el método de la máxima verosimilitud. Al proceder con este método podemos condicionar la función de verosimilitud a los valores iniciales, o bien no hacerlo y llevar a cabo una estimación de la verosimilitud exacta. Cuando se aplica el principio de máxima verosimilitud con el enfoque no condicional se obtienen las funciones de verosimilitud exactas. Por su parte, cuando el principio se aplica con el enfoque condicional se obtienen funciones de verosimilitud condicionadas. Bajo el enfoque condicional, la maximización de la función de verosimilitud coincide con los estimadores mínimos cuadráticos. Para una explicación del método de los momentos, de los mínimos cuadrados y de la máxima verosimilitud, los textos de Anderson (1994), Cryer (1986), Fuller (1996) y Box y Jenkins (1976) son especialmente recomendables.

2.3.-Transformaciones para remover la dependencia serial

Si las oportunas verificaciones diagnosticas indican que los parámetros de- modelo han sido estimados satisfactoriamente, entonces estamos en condiciones de proceder a transformar la serie de modo que los residuales sigan un proceso de ruido blanco. Conviene no olvidar que de obviarse la presencia de dependencia serial, el analista tendría serias dificultades en el momento de determinar si un cambio es fruto de una intervención o si, por el contrario, forma parte del comportamiento natural de la serie. Por este motivo, es de capital importancia descubrir una matriz de transformación T , tal que la relación

$$Ty = TX\beta + T\epsilon$$

tenga una matriz de varianzas y covarianzas escalar.

En la tabla 1 presentamos en forma escalar algunas de las transformaciones algebraicas que podemos utilizar para blanquear los procesos estocásticos

estacionarios que más comúnmente suelen encontrarse en nuestro ámbito científico, de modo que los residuales del modelo constituyan la realización de procesos estocásticos, pero de ruido blanco.

Tabla 1.- Resumen de las transformaciones obtenidas para remover la dependencia serial

Modelo	Transformación
$AR(1)$	$Z_t^* = Z_t - \phi_1 Z_{t-1}$
$AR(2)$	$Z_t^* = Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2}$
$MA(1)$	$Z_t^* = Z_t + \theta_1 Z_{t-1}^*$
$MA(2)$	$Z_t^* = Z_t + \theta_1 Z_{t-1}^* + \theta_2 Z_{t-2}^*$
$ARMA(1, 1)$	$Z_t^* = Z_t - \phi_1 Z_{t-1} + \theta_1 Z_{t-1}^*$

La transformación Z^* se refiere a cualquier variable que forme parte del modelo especificado

2.4.- Evaluación del efecto del tratamiento

Una vez que las variables y el interceptor han sido transformadas, los efectos del tratamiento, tendencias, variaciones estacionases, y demás covariadas incluidas en la matriz del diseño son calculados por regresión múltiple. Por ejemplo, una vez removida la dependencia serial originada por un proceso $AR(1)$, si tenemos una matriz de diseño, X^* , en la que tan sólo se estima el nivel y el cambio de nivel, la solución mínimo cuadrática para estimar el vector de parámetros viene dada por:

$$\hat{\beta}^* = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0^* \\ \hat{\beta}_1^* \end{bmatrix} = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} y^*$$

mientras que la suma de cuadrados residual para un particular valor de $\hat{\phi}_1$, $\hat{\beta}_0^*$ e $\hat{\beta}_1^*$ resulta ser:

$$SC_R^* = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = (\mathbf{y}^* - \mathbf{X}^* \hat{\boldsymbol{\beta}}^*)' (\mathbf{y}^* - \mathbf{X}^* \hat{\boldsymbol{\beta}}^*)$$

y la varianza residual resultante de ajustar el modelo a las observaciones, y_t^* , viene dada por:

$$CM_R^* = \frac{(\mathbf{y}^* - \mathbf{X}^* \hat{\boldsymbol{\beta}}^*)' (\mathbf{y}^* - \mathbf{X}^* \hat{\boldsymbol{\beta}}^*)}{N-2} = \frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^*}{N-2} = \hat{\sigma}_\varepsilon^{*2}$$

Bajo teoría normal Mann y Wald (1943) han mostrado que las hipótesis en relación con β_0^* y β_1^* pueden ser probadas adecuadamente mediante la prueba t como sigue:

$$\frac{\hat{\beta}_0^* - \beta_0^*}{\hat{\sigma}_\varepsilon^* \sqrt{c^{jj}}} \sim t_{N-2} \quad \text{y} \quad \frac{\hat{\beta}_1^* - \beta_1^*}{\hat{\sigma}_\varepsilon^* \sqrt{c^{jj}}} \sim t_{N-2}$$

donde, c^{jj} es el j^{th} elemento de la diagonal de la matriz $(\mathbf{X}^{*\prime} \mathbf{X}^*)^{-1}$ Y t_{N-2} es la variable t de Student con $N-2$ grados de libertad.

Obviamente, especificaciones alternativas de la matriz de diseño, X_t , permiten evaluar hipótesis diferentes concernientes a la naturaleza de la intervención. En la tabla 2 presentamos algunos ejemplos ilustrativos de matrices de diseño para diferentes tipos de intervención.

Concluimos con esta breve descripción de la técnica resumiendo los pasos más importantes que debe seguir el analista de series temporales a la hora de estimar el efecto del tratamiento mediante un diseño de series temporales interrumpidas simple:

1.- Se especifica el modelo original en el que aparezcan adecuadamente modelados los efectos relativos al tratamiento, tendencias, ciclos y demás covariadas de interés.

2.- Se estima la ecuación de series temporales interrumpidas por mínimos cuadrados ordinarios y se calculan los residuales del modelo.

Tabla 2. - Matrices de diseño para una simple unidad de análisis ($n_1 = n_2 = 5$)

(A) Cambio de nivel abrupto y constante	(B) Cambio de nivel y presencia de tendencia	(C) Cambio de nivel y cambio de tendencia	(D) Cambio de nivel e intervenciones múltiples
1 0	1 0 01	1 0 01 0	1 0 0 0
1 0	1 0 02	1 0 02 0	1 0 0 0
1 0	1 0 03	1 0 03 0	1 0 0 0
1 0	1 0 04	1 0 04 0	1 0 0 0
1 0	1 0 05	1 0 05 0	1 0 0 0
-----	-----	-----	-----
1 1	1 1 06	1 1 06 1	1 1 0 0
1 1	1 1 07	1 1 07 2	1 1 1 0
1 1	1 1 08	1 1 08 3	1 1 1 1
1 1	1 1 09	1 1 09 4	1 1 1 1
1 1	1 1 10	1 1 10 5	1 1 1 1
(E) Cambio de nivel demorado y abrupto	(E) Sin cambio de nivel. cambio de tendencia	(F) Cambio de nivel gradual y constante	(G) Cambio de nivel abrupto y temporal
1 0	1 01 0	1 0.0000	1 0.0000
1 0	1 02 0	1 0.0000	1 0.0000
1 0	1 03 0	1 0.0000	1 0.0000
1 0	1 04 0	1 0.0000	1 0.0000
1 0	1 05 0	1 0.0000	1 0.0000
-----	-----	-----	-----
1 0	1 06 1	1 0.0625	1 1.0000
1 0	1 07 2	1 0.1250	1 0.5000
1 1	1 08 3	1 0.2500	1 0.2500
1 1	1 09 4	1 0.5000	1 0.1250
1 1	1 10 5	1 1.0000	1 0.0625

3.- Se utilizan los residuales obtenidos en el paso anterior para identificar el modelo de dependencia serial y estimar sus parámetros correspondientes.

4.- Para remover la autocorrelación de los residuales se transforman todas las variables del modelo inicial.

5.- Se utilizan las variables transformadas y se estiman por mínimos cuadrados ordinarios los efectos del tratamiento, tendencias, ciclos y demás covariadas incluidas en la especificación del modelo original.

6.- Por último, desde las variables transformadas se reestima de nuevo la ecuación de series temporales por mínimos cuadrados y se verifica que la dependencia serial ya no permanece en el modelo.

En definitiva, si logramos que los datos gocen de las propiedades deseadas, en nuestro caso que no presenten dependencia serial, el procedimiento de estimación mínimo cuadrático ordinario, además de proporcionarnos estimadores de los parámetros insesgados, también nos proporcionará estimadores que posean las propiedades de consistencia y eficiencia; ya que la estimación de las varianzas muestrales de los estimadores no se encontrarán sesgadas. Consecuentemente, podremos efectuar predicciones y utilizar los habituales contrastes de t y F , pues las distribuciones que se asumen si que cumplen en este caso con las propiedades básicas.

3.- EXTENSIÓN DE LA TÉCNICA AL ANÁLISIS DE MÚLTIPLES UNIDADES

El análisis de los diseños transversales de series temporales interrumpidas se puede abordar con diferentes enfoques en función del número de unidades que se incluyan, de la cantidad de observaciones que se realicen, de si reciben uno más tratamientos todas las unidades o tan sólo una parte de las mismas y del tipo de asunciones que se efectúen. Por ejemplo, Vallejo y Fernández (1990) recomiendan emplear el modelo mixto del AVAR contemplando la dependencia serial del error, Algina y Olejnik (1982) proponen utilizar el análisis de perfiles multivariado, mientras que Simonton (1977) plantea el análisis de series temporales multigrupo con la dependencia serial modelada a través de un proceso AR(1) asumido de antemano. Así mismo, si se conviene en que todas las unidades que configuran el diseño reciben tratamiento, con independencia del momento temporal en que se las presente, una solución que consideramos enormemente atractiva consiste en la generalización del análisis de series temporales interrumpidas simple que acabamos de exponer.

Tabla 3. - Matrices de diseño con dos unidades de análisis ($n_1=n_2=5$)

(A) Cambio de nivel abrupto constante intra y entre series					(B) Cambio de nivel abrupto y constante y de tendencia dentro y a través de las series						
N	C_n	N_e	C_{ne}	N	C_n	N_e	C_{ne}	T	C_T	$N_e T$	$C_{ne} T$
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	3	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	4	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	5	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	6	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	7	2	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	8	3	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	9	4	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	10	5	0	0
.....											
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	2	0	2	0
1	0	1	0	1	0	1	0	3	0	3	0
1	0	1	0	1	0	1	0	4	0	4	0
1	0	1	0	1	0	1	0	5	0	5	0
1	1	0	1	1	1	0	1	6	1	6	1
1	1	0	1	1	1	0	1	7	2	7	2
1	1	0	1	1	1	0	1	8	3	8	3
1	1	0	1	1	1	0	1	9	4	9	4
1	1	0	1	1	1	0	1	10	5	10	5

Un procedimiento similar ha sido sugerido por Velicer y McDonald (1991) dentro del contexto del enfoque de la transformación general.

La extensión del análisis de series temporales con una simple unidad de análisis a situaciones en las que se disponga de dos o más unidades experimentales es relativamente sencillo, para ello tan sólo se requiere descubrir la transformación algebraica adecuada, construir un supervector de observaciones con las puntuaciones de las diferentes unidades experimentales y utilizar una matriz de diseño parametrizada correctamente. El último objetivo es relativamente sencillo de conseguir complementando el conocimiento disponible con el examen gráfico de las series. En la tabla 3 mostramos dos ejemplos de matrices de diseños.

Dicho lo anterior, para que el modelo de series temporales interrumpidas múltiple constituya una extensión directa del modelo de series temporales interrumpidas simple necesitamos efectuar dos conjeturas. Por un lado, que las distintas unidades experimentales que configuran el diseño sean independientes y, por otro lado, que las diferentes series temporales constituyan realizaciones aleatorias del mismo proceso. La última suposición parece razonable, pues en teoría las series están determinadas por un proceso subyacente al mismo constructo de investigación.

Para verificar el primero de los dos supuestos, es muy importante calcular matrices e correlaciones muestrales $\mathbf{R}_a(k)$ entre los residuales de los modelos univariados ajustados para las diferentes series individuales y verificar si existe o no correlación entre ellos. De acuerdo con dicha operación tres situaciones se pueden presentar: a) que los errores no están correlacionados, b) que lo están contemporáneamente (la i -ésima serie está afectada tan sólo por su propio pasado, si bien los parámetros de los m diferentes modelos pueden estimarse conjuntamente) y c) que los errores están correlacionados a lo largo de diversos retardos (la i -ésima serie además de estar afectada por su propio pasado, también lo está por la historia pasada de otras series implicadas en el diseño). La significación de la matriz de correlaciones para los retardos que se estimen oportunos puede evaluarse mediante el criterio de *pormanteau* descrito por Anderson (1984: p.238). Bajo hipótesis nula el estadístico $\chi^2 = -[n-1(2m+5)/6] \ln |\mathbf{R}_a(K)|$ sigue una distribución ji-cuadrado con $m(m-1)/2$ grados de libertad. Estos y otros menesteres más complejos pueden lograrse mediante el programa WMTS-1 desarrollado por Tiao, Box, Grupe, Hudak, Bell y Chang (1979). A raíz de lo expuesto, la comprobación del segundo supuesto resulta inmediata.

4.- EJEMPLO

Para ilustrar la técnica vamos a utilizar los datos de la investigación realizada con dos grupos naturales por Komaki, Barwick y Scott (1978). El principal objetivo de la investigación de estos autores consistió en comprobar si un determinado programa comportamental ejercía algún control sobre la seguridad de los trabajadores de una empresa de alimentación. El tratamiento en cuestión consistió en un programa que incluía una breve explicación en torno a las conductas de seguridad, una presentación visual de las medidas de seguridad deseadas y en el frecuente refuerzo de prácticas seguras. La variable independiente fue implementada en momentos temporales distintos en dos departamentos no equivalentes de la empresa referida. En el primer departamento el tratamiento se introdujo en la sesión número veinte, mientras que en el segundo departamento el tratamiento se introdujo en la sesión número cincuenta. La variable dependiente consistió en el porcentaje de respuestas ejecutadas sin riesgo por los empleados de los dos departamentos de la empresa de fabricación de alimentos a lo largo de las sesenta y un sesiones que se extendió la investigación. La incidencia de las prácticas de seguridad fueron comprobadas durante el trabajo, tanto antes de la presentación del tratamiento, como durante y después de su implementación. En la figura 1 aparecen recogidos gráficamente los resultados para cada uno de los departamentos de la empresa de alimentación, tanto antes de la presentación del tratamiento como durante la ocurrencia del mismo.

El primer paso para implementar correctamente la técnica descrita en el apartado anterior, implica identificar el modelo de dependencia serial para cada una de las series temporales de las que consta la investigación. Para el caso que nos ocupa la especificación de cada uno de los dos modelos aparece recogida en la tabla 4. Ambos modelos son parsimoniosos y conducen a un ajuste extremadamente bueno, lo cual se traduce en que los residuales recalculados desde las variables transformadas constituyen ahora una secuencia de variables aleatorias normal e independientemente distribuidas con media cero y varianza constante. Para comprobar que los residuales de los modelos especificados siguen un proceso que no difiere de un ruido blanco, a partir de las doce primeras autocorrelaciones de los residuales se ha calculado el criterio *deportmanteau* Q de Ljung y Box (1976). Como queda puesto de relieve en la tabla 4 en ninguno de los dos casos el valor empírico del coeficiente Q supera su correspondiente valor teórico.

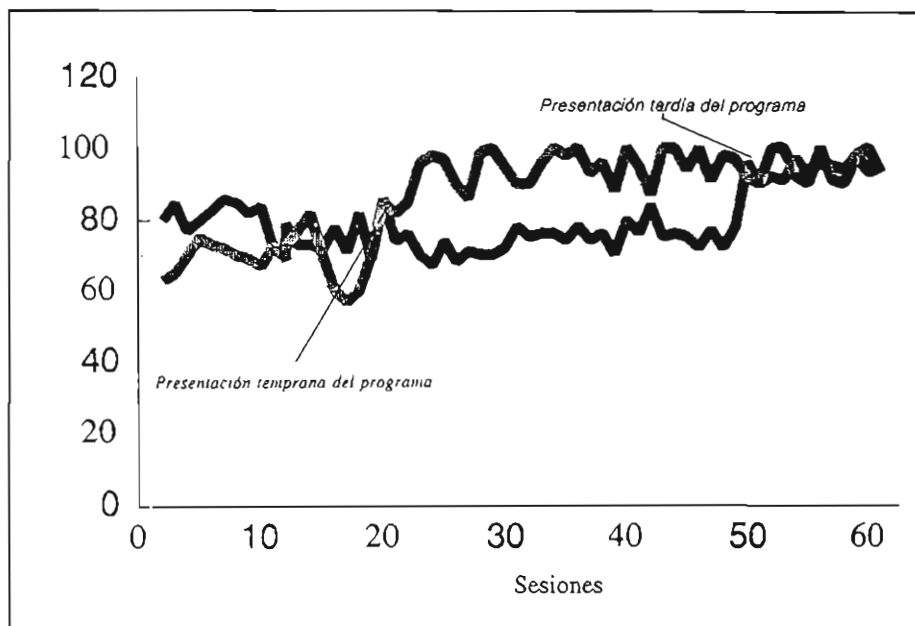


Figura 1.- Porcentaje de respuestas ejecutadas sin riesgo por los empleados de los dos departamentos. (Datos tomados con ligeras modificaciones desde Komaki et al, 1978).

Tabla 4.- Modelos univariados ajustados para cada una de las series

Modelos univariados ajustados	Estadístico Q de Ljung-Box	σ^2
Serie 1: $(1 - .42B + .24B^2)y_t = a_t$	$Q = 4.9$ ($\chi^2_{.05, 10} = 18.307$)	25.44
Serie 2: $(1 - .52B^2)y_t = a_t$	$Q = 5.0$ ($\chi^2_{.05, 11} = 19.675$)	16.06

Tras ajustar los modelos univariados se procedió a calcular las matrices de correlaciones muestrales $R_3(k)$ entre los residuales de los modelos. En la tabla 5 aparecen la matriz de correlaciones correspondiente a $R_3(0)$, $R_3(1)$, $R_3(2)$ y $R_3(3)$. En ninguno de los cuatro retardos analizados se detectó presencia de correlaciones significativas. De acuerdo con la prueba ji-cuadrado global, cada una de las matrices anteriores no resultó ser distinta de una matriz de identidad ($P_{(0,\dots,3)}=I$), pues $\chi^2_{.05,1}=3.841$ supera en todos los casos cada uno de los valores empíricos que aparecen recogidos en la parte inferior de la tabla 5.

Tabla 5.- Matrices de correlaciones residuales para diversos retardos

$R_3(0)$	$R_3(1)$	$R_3(2)$	$R_3(3)$
$\begin{bmatrix} 1.000 & -0.146 \\ -0.146 & 1.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.000 & -0.066 \\ -0.066 & 1.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.000 & -0.035 \\ -0.035 & 1.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.105 \\ 0.105 & 1.000 \end{bmatrix}$
$\chi^2=1.256$	$\chi^2=0.283$	$\chi^2=0.113$	$\chi^2=0.682$

Una vez verificado que las series, además de estar afectadas tan sólo por su propio pasado, constituyen la realización de procesos autorregresivos similares, se estima la ecuación de series temporales interrumpidas por mínimos cuadrados ordinarios y se calculan los residuales del modelo. Para ello se utiliza como variable dependiente las puntuaciones resultantes de superponer las observaciones de los dos departamentos y como matriz de diseño los parámetros correspondientes al nivel general de las series (N), cambio de nivel dentro de cada serie (C_n), diferencias de nivel entre series (N_e) y diferencias de cambio de nivel entre las series (C_{ne}). La matriz de la parte izquierda de la tabla 3 sirve como referente para construir la matriz de diseño, las dos únicas diferencias entre los datos que aparecen en la tabla 3 y los del ejemplo que venimos manejando, radican en que en éste las series tienen mayor longitud y el tratamiento se implementa en momentos temporales distintos.

Tras el pertinente análisis de la regresión mínimo cuadrática ordinaria, se obtienen los resultados que siguen:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 69.211 \\ 25.123 \\ 6.728 \\ -6.812 \end{bmatrix}; c_{jj} = \begin{bmatrix} 0.053 \\ 0.076 \\ 0.073 \\ 0.181 \end{bmatrix}; SC_E = 3077.558; CM_E = 26.081; \hat{\sigma}_\epsilon = 5.107$$

De acuerdo con la prueba *t*, podemos decir que todos los coeficientes estimados resultaron significativamente diferentes de 0 al 1 %, pues

$$t_{0.1,118} = 2.62 < t_N = 58.86; t_{0.1,118} = 2.62 < t_{cn} = 17.84; t_{0.1,118} = 2.62 < t_{Nn} = 4.87; t_{0.1,118} = 2.62 < t_{cc} = -3.13$$

Antes de entrar en valoraciones estadísticas relativas a la posible influencia del tratamiento, vamos a verificar si los residuales del modelo se comportan como una secuencia de variables aleatorias distribuidas independientemente, o si por el contrario, la serie presenta dependencia serial, en cuyo caso, debemos proceder a eliminar dicha dependencia.

Para tal cometido utilizamos el estadístico *d* de Durbin y Watson (una descripción de esta prueba se encuentra en Vallejo, 1995, p. gs. 359-364). De acuerdo con esta prueba, $d = 1.419$, a partir de las tablas de Savin y White (1977) observamos que para un nivel de significación del 5 % $k=4$ y $N=122$, las cotas inferior y superior valen, respectivamente, $d_i=1.632$ y $d_s=1.745$. Por tanto, al ser

$$d < d_i, (1.419 < 1.632)$$

rechazamos la hipótesis nula de ausencia de dependencia serial y aceptamos la hipótesis alternativa de dependencia serial positiva en los residuales de la serie.

A continuación, pasamos a descubrir el modelo de dependencia serial que siguen nuestros datos, para ello desde los residuales de la ecuación de series temporales interrumpidas calculamos la FAC y FACP. A tal efecto, tras emplear la rutina *2t* del paquete estadístico BMDP (1990), se obtuvieron las claves estadísticas que aparecen recogidas en la figura 2.

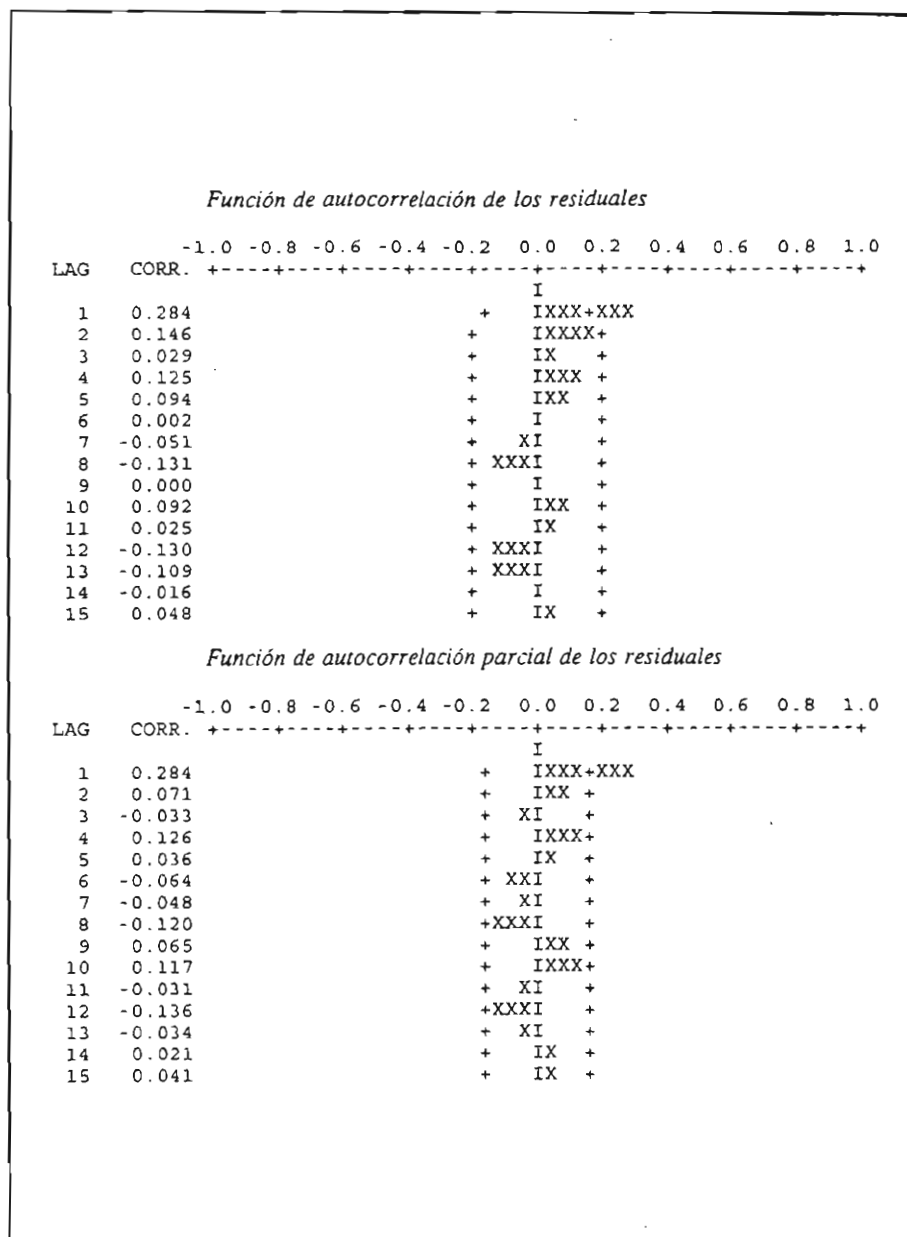


Figura 2.- Funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial de los residuales

Como se desprende del análisis de la *FAC* y de la *FACP*, dichas claves parecen acomodarse a un modelo autorregresivo de primer orden, dado que en la *FAC* se observa un decaimiento exponencial y la *FACP* parece cortarse después del primer retardo. En un principio, planteamos la posibilidad de que el modelo tentativo queda correctamente especificado mediante la ecuación

$$(1 - \phi_1 B)\varepsilon_t = v_t$$

Seguidamente, utilizamos la rutina *2t* del programa BMDP con el propósito de obtener los estimadores de los parámetros. El valor de dichas estimaciones aparece esquematizado en la tabla 5. A un resultado prácticamente idéntico, en lo que a la estimación de los parámetros se refiere, hubiésemos llegado de haber utilizado el procedimiento mínimo cuadrático ordinario. Para ello tan sólo tendríamos que regresar los residuales del modelo sobre sí mismos, eliminando de la variable criterio la primera puntuación y de la variable predictor la última puntuación. En concreto, el valor obtenido mediante la forma descrita es plenamente coincidente con el proporcionado por el método que en la tabla 6 se denomina de los mínimos cuadrados condicionados.

Tabla 6.- Valores del parámetro del modelo ARIMA especificado

<i>Estimación de los parámetros del modelo por el método de los mínimos cuadrados condicionados</i>							
Parámetro	Variable	Tipo	Factor	Orden	Estimador	Error estándar	Razón-t
1	Programa	AR	1	1	0.2844	0.0869	3.27
Suma de cuadrados residual = 2790.075440							
Grados de libertad = 120							
Cuadrado medio residual = 23.250629							
<i>Estimación de los parámetros del modelo por el método de los mínimos cuadrados no condicionados</i>							
Parámetro	Variable	Tipo	Factor	Orden	Estimador	Error estándar	Razón-t
1	Programa	AR	1	1	0.2881	0.0863	3.34
Suma de cuadrados residual = 2790.117680							
Grados de libertad = 120							
Cuadrado medio residual = 23.250980							

Posteriormente, tras verificar que, tanto los coeficientes correspondientes a la función de autocorrelación, como los correspondientes a la función de autocorrelación parcial se encuentran dentro de los límites de confianza definidos por más menos dos errores estándar, nada se opone a que se concluya que el modelo queda correctamente especificado mediante la ecuación que sigue:

$$(1 - 0.288\beta)\varepsilon_t = v_t$$

Una vez que hemos diagnosticado la estructura autocorrelacional que siguen los residuales del modelo, transformamos las variables predictoras y criterio para eliminar la dependencia serial del error. De acuerdo con las transformaciones recogidas en la tabla 6, se utiliza la ecuación que sigue:

$$y_t^* = y_t - 0.288y_{t-1}$$

Bajo esta nueva situación los valores obtenidos para el vector de parámetros β^* fueron los siguientes:

$$\hat{\beta}^* = \begin{bmatrix} 70.077 \\ 24.147 \\ 5.645 \\ -5.545 \end{bmatrix}; c_{jj}^* = \begin{bmatrix} 0.108 \\ 0.151 \\ 0.144 \\ 0.336 \end{bmatrix}; SC_E^* = 2766.196; CM_E^* = 23.643; \hat{\sigma}_\varepsilon^* = 4.862$$

Lo que da lugar a que definamos la ecuación de regresión que se ofrece a continuación:

$$y_t^* = 70.08(1 - \phi) + 24.15X_{1t}^* + 5.64X_{2t}^* - 5.54X_{3t}^* + v_t$$

donde los errores estándar de los estimadores correspondientes al nivel, cambio de nivel dentro de cada serie, nivel entre series y cambio de nivel entre series valen, respectivamente, 1.612, 1.883, 1.819, y 2.818; mientras que el estadístico Durbin-Watson, d , es igual a 2.08. Dado que:

$$1.745 < 2.08 < 4 - 1.745$$

concluimos que la dependencia serial no permanece en el modelo transformado, pues el coeficiente de autocorrelación no difiere significativamente de cero.

De acuerdo con la prueba t , los coeficientes estimados correspondientes a $N^* C_n^*$, y N_e^* resultaron significativamente diferentes de 0 al 1 %, mientras que el coeficiente referido a C_{ne}^* no resultó ser significativamente distinto de cero al 5%, pues

$$t_{0.05;117} = 1.98 > (t_{C_{ne}^*} = -5.545/2.818)$$

Obviamente, este resultado contradice la conclusión a la que se habría llegado de estimarse la ecuación de series temporales interrumpidas por mínimos cuadrados ordinarios sin reparar en la dependencia serial existente en los datos. Para los restantes coeficientes la interpretación de los resultados coincidiría con la que se obtendría de no reparar en la falta de independencia de los residuales. No obstante, desde el punto de vista cuantitativo se observan sensibles diferencias. Así, por ejemplo, la prueba t referida a la eficacia del tratamiento dentro de cada serie para la ecuación transformada es alrededor de un 39% más pequeño que el valor de la prueba t obtenido desde el modelo estimado con la dependencia serial ignorada. A su vez, la prueba referida a la variable que denota diferencias de nivel entre las series es un 59% más reducido que el obtenido desde la ecuación de regresión que no repara en el problema de la dependencia serial.

Finalmente, se puede comprobar como los residuales de la nueva serie transformada se comportan como una secuencia de variables aleatorias normal e independientemente distribuidas con media cero y varianza constante; esto es; describen un proceso de ruido blanco.

BIBLIOGRAFÍA

- Anderson, T. W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. 2nd Edition. New York: John Wiley.
- Anderson, T. W. (1994). *The Statistical Analysis of Time Series*. 2nd Edition. New York: John Wiley.
- BMDP Statistical Software (1990). Health Sciences Computing Facility. Department of Biomathematics, Los Angeles, CA: University of California Press.

- Box, G.E.P. y Cox, D.R.** (1964). An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society serie B*, 26, 221-25 1.
- Box, G. E. P. y Cox, D. R.** (1 982). An analysis of transformations revisited (rebutted). *Journal of the American Statistical Association*, 77, 209-21 1.
- Box, G.E.P.y Jenkins, G.M.** (1970). *Time Series Analysis.- Forecasting and Control*. San Francisco, CA:Holden-Day.
- Box, G.E.P.y Jenkins, G.M.** (1976). *Time Series Analysis.- Forecasting and Control*. 2nd Edition. San Francisco, CA: Holden-Day.
- Box, G.E.P. y Tiao, G.C.** (1965). A change in level of a nonstationary time series. *Biometrik-a*, 52, 181-192.
- Chou, Y.L.** (1975). *StatisticsAnalysis*. New York, NY: McGraw-Hill (Trad. Interamericana, 1977).
- Cowles, M.** (1989). *Statistic in Psychology: An Historical Perspective*. Hillsdale, New Jersey: LEA.
- Cryer, J.** (1986). *Time Ser- es Analysis*. Boston, MA: PWS-KENT Publishing Company.
- Fuller, W.A.** (1996). *Introduction to Statistical Time Series*. 2nd edition. New York: John Wiley.
- Glass, G.V.: Willson, V.L. y Gottman, J.M.** (1975). *Design and Analysis of Time-Series Experiments*. Boulder CO: Colorado Associated University Press.
- Judd, C.M. y Kenny, D.** (1981). *Estimating the Effects of Social Interventions*. New York, NY: Cambridge University Press.
- Komaki, J.; Barwick, K.D. y Scott, L.R.** (1978). A behavioral approach to occupational s fety: Pinpointing and reinforcing safe performance in a food manufacturing. *Journal of Applied Psychology*, 63, 434-445.
- Mann,H.B. y Wald, A.** (1943). On hte statistical treatment of linear stochastic difference equations. *Econometrica*, 11, 277-283.
- Manly, B. F.** (1992). *The Design andanalysis ofresearch Studies*. Cambridge: Cambri.dge University Press.
- Matyas, T.A. y Greenwood, K.M.** (1990). Visual analysis of single-case time series: Effects of variability, serial dependence, and magnitude of intervention effect. *Journal of Applied Behavioral Analysis*, 23, 341-35 1.
- Matyas, T.A. y Greenwood, K.M.** (1991). Problems in the estimation of autocorrelation in brief time series and some implications for behavioral data. *Behavioral Assessment*, 13, 137-157.
- Savin , N.E. y White, K.J.** (1977). The Drbin-Watson test for serial correlation with extreme sample sizes or many regressors. *Econometrica*, 45, 1986-1996.
- Scheffé, H.** (1959). *The Analysis of Variance*. New York: John Wiley.
- Tiao,G.C.; Box, G.E.P.; Grupe, M.R.; Hudak, G.B.; Bell, W.R. y Chang, I.** (1979). *The Wisconsin Multiple Time Series (WMTS-1) Program.- A Preliminary Guide*. Department of Statistics, University of Wisconsin-Madison.

- Vallejo, G.** (1995). Problemas inferenciales asociados con el uso de diseños de series de tiempo interrumpidas. En M.T. Anguera, J. Arnau, M. Ato, M.R. Martínez, J. Pascual y G. Vallejo (Eds.): *Métodos de Investigación en Psicología*, pp.353-379. Madrid: Síntesis.
- Vallejo, G.** (1996). *Diseños de Series Temporales Interrumpidas*. Barcelona: Ariel
- Vallejo, G. y Fernández, P.** (1990). Diseños de medidas repetidas con errores autocorrelacionados. *Psicothema*, 2, 189-209.
- Velicer, F.W. y McDonald, P.R.** (1991). Cross-Sectional Time Series Designs: A General Transformation Approach. *Multivariate Behavioral Research*, 26(2), 247-254.