

La teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial

Esperanza Ochaíta Alderete

Universidad Autónoma de Madrid

I. CONSIDERACIONES GENERALES

Piaget dedica dos extensos volúmenes al estudio del desarrollo del conocimiento espacial, basados en la realización de unos treinta experimentos diferentes¹. El primero de los libros, publicado en 1947 en colaboración con Inhelder y titulado *La representación del espacio en el niño*, se ocupa de conocer cómo surgen en el desarrollo ontogenético las relaciones espaciales topológicas, proyectivas y euclidianas. En la segunda obra, llevada a cabo en 1948 por Piaget, Inhelder y Szeminska con el título *La geometría espontánea en el niño*, se estudia la génesis de la geometría euclidiana, esto es, cómo surgen en el niño la conservación y la medición de la longitud, la superficie y el volumen. Vamos a referirnos, preferentemente, a la primera de las obras citadas.

Antes de entrar directamente en la descripción de los experimentos correspondientes a los espacios topológico, pro-

yectivo y euclidiano, debemos aclarar tres aspectos centrales en la teoría piagetiana del conocimiento espacial:

1. En el marco teórico piagetiano, el espacio no viene dado «a priori» surgiendo de la mera percepción, sino que ha de irse elaborando poco a poco, jugando un papel decisivo la actividad del sujeto. El conocimiento del espacio proviene al principio de la actividad sensoriomotriz y, posteriormente, a un nivel representativo, la actividad —real o imaginada— irá flexibilizando, coordinando y haciendo reversibles las imágenes espaciales para convertirlas en operaciones. Por tanto, para Piaget, tal conocimiento no deriva, sin más, de la percepción visual, sino que constituye el producto final de una larga y ardua construcción evolutiva que comienza con el nacimiento y no termina hasta la adolescencia, y en la que la actividad perceptiva juega un papel absolutamente imprescindible.

2. Se establecen tres tipos de relaciones espaciales: topológicas, proyectivas y

euclidianas. Las relaciones topológicas tienen en cuenta el espacio dentro de un objeto o figura particular, y comprenden relaciones de proximidad, separación, orden, cerramiento y continuidad. Por el contrario, los espacios proyectivo y euclidiano consideran los objetos y sus representaciones, teniendo en cuenta las relaciones entre esos objetos de acuerdo con sistemas proyectivos (espacio proyectivo), o de acuerdo con ejes coordenados (espacio euclidiano o métrico). Dentro de la teoría que nos ocupa, el desarrollo ontogénico de estas relaciones sigue un orden inverso al desarrollo epistemológico, ya que el niño elabora primero el espacio topológico, tanto en el nivel de la acción como en el de la representación. Las relaciones proyectivas y euclidianas se desarrollan paralelamente, aunque el equilibrio de las segundas se consigue más tarde.

3. Como en el resto de los aspectos del desarrollo intelectual, también en lo referente al conocimiento espacial nos encontramos con tres grandes períodos o estadios: período sensoriomotor, período de las operaciones concretas (que se subdivide, a su vez, en un subperíodo preoperativo y otro de operaciones concretas propiamente dichas), y período de las operaciones formales².

En el período sensoriomotor, que se extiende desde el nacimiento hasta el año y medio o dos años, momento en que el pensamiento comienza a interiorizarse, el niño va a ir elaborando un conocimiento práctico del espacio comenzando por las relaciones topológicas y elaborando después las proyectivas y euclidianas. Entre el nacimiento y los cuatro o cinco meses el bebé es capaz de percibir, únicamente, relaciones topológicas de dificultad creciente, pero al no existir todavía coordinación entre los distintos espacios sensoriales, sobre todo entre la visión y la prensión, no percibe los objetos como permanentes, ni los tamaños y las formas

como constantes. Posteriormente, entre los 4-5 y 10-12 meses, se coordinan la visión y la prensión, construyéndose numerosos esquemas manipulativos bajo control visual, los cuales llevan al niño a percibir relaciones euclidianas (los objetos adquieren un tamaño constante con independencia de los cambios de distancia), y proyectivas (los objetos tienen una forma constante independientemente de los cambios de posición). Por último, durante el segundo año, el niño va a ser capaz de relacionar unos objetos con otros en el espacio elaborando, a nivel práctico, un «grupo» de desplazamientos, lo cual le lleva a descubrir, por ejemplo, que puede alcanzar un punto en el espacio por dos caminos diferentes y que, cuando retrocede al punto de partida, el cambio de lugar se anula en cierto sentido.

Durante el período de las operaciones concretas, y en su primer subestadio, que se extiende desde los comienzos del pensamiento interiorizado hasta los siete u ocho años, el niño ha de ir reelaborando a nivel representativo todas las adquisiciones que, a nivel práctico, ya tenía en el estadio anterior, comenzando por las relaciones topológicas y sólo más tarde con las proyectivas y euclidianas. En consecuencia, durante el subestadio de las operaciones concretas propiamente dichas (desde los siete u ocho años hasta los once o doce), el niño irá considerando progresivamente las relaciones proyectivas y euclidianas, gracias a que su pensamiento operatorio le facilita la flexibilización y reversibilidad del espacio.

Por último, durante el estadio de las operaciones formales, que comienza a los once o doce años y culmina en la adolescencia, las operaciones espaciales pueden ser totalmente separadas de la acción real, de forma que los individuos son capaces de considerar un universo total de posibilidades espaciales y comprender cuestiones tales como, por ejemplo, la idea de infinito.

Hemos de hacer notar que Piaget y sus colaboradores, en sus trabajos sobre el conocimiento del espacio, al igual que en otras investigaciones sobre temas específicos del desarrollo cognitivo, clasifican los resultados en una serie de etapas que, integradas en los períodos a que acabamos de referirnos, tienen la función de ofrecer una sistematización de los resultados experimentales. Así proponen cuatro etapas: la primera (I) comprende desde los tres años (momento en que comienza a ser posible entrevistar a los niños), hasta los cuatro o cuatro y medio; la segunda (II) desde los cuatro y medio hasta la edad del comienzo de las operaciones concretas (seis, siete u ocho años); la etapa tercera (III), comenzando a la edad en que termina la anterior, coincide con el subperíodo de completamiento de las operaciones concretas; y, por último, la etapa cuarta (IV) comienza sobre los once o doce años, con el pensamiento formal. Cada una de estas etapas se subdivide, asimismo, en dos subetapas: «A» y «B».

A continuación se pasa a revisar la génesis de los conceptos topológicos, proyectivos y euclidianos en el niño. De los numerosos experimentos que Piaget y sus colaboradores nos describen a lo largo de sus dos obras, se analizan con mayor detalle aquellos más conocidos y los que han dado lugar a mayor número de revisiones.

II. EL ESPACIO TOPOLOGICO

La primera de las tres partes en que se divide la obra de Piaget e Inhelder (1947) está dedicada al espacio topológico. Los dos primeros experimentos que se describen, percepción «háptica» y dibujo, constituyen la prueba más directa de la hipótesis a que nos hemos referido anteriormente, según la cual, las diferenciaciones topológicas preceden en el desarrollo on-

togenético a las proyectivas y euclidianas. Las restantes se ocupan de estudiar las relaciones topológicas específicas de orden, cerramiento o cierre y continuidad.

A) *La percepción «háptica»*. Con este experimento los autores tratan de comprobar que la concepción adulta del espacio es fruto de la construcción activa del propio sujeto y no deriva, sin más, de la percepción. Aunque Piaget e Inhelder no estaban interesados, primariamente, en el estudio del tacto, llevaron a cabo un experimento de exploración «háptica» de formas geométricas, para demostrar el papel que la actividad perceptiva cumple en la ontogénesis de la percepción de las formas, y para investigar si las relaciones topológicas preceden a las proyectivas y euclidianas en la exploración de esas formas. Al considerar muy difícil el estudio del desarrollo de la percepción visual en los bebés³, decidieron abordar la evolución de la percepción «háptica» en niños más mayores. En una primera etapa, los niños son capaces de hacer discriminaciones topológicas pero no euclidianas (entre dos y cuatro años). En la siguiente, las formas se exploran más activamente, lo que permite una progresiva estimación de las relaciones euclidianas tales como ángulos, paralelismos, etc. (cuatro a siete años). A partir de los seis o siete años, los niños son capaces de reconocer todas las formas, mediante un método operacional de dirigir la exploración.

B) *El dibujo*. La segunda de las investigaciones del espacio topológico está dedicada al análisis del dibujo infantil. De nuevo, se trata de probar cómo la transición de la percepción a la representación mental implica la reconstrucción de las relaciones topológicas, en primer lugar, y luego de las proyectivas y euclidianas, todas ellas perfectamente elaboradas ya a nivel práctico. Se analiza tanto el desarrollo del dibujo espontáneo, como el de la copia de figuras geométricas.

Al estudiar el dibujo espontáneo, Pia-

get e Inhelder relacionan las etapas de evolución del dibujo propuestas por Luquet (1923) con el desarrollo del conocimiento espacial. En la etapa de «incapacidad sintética», que coincide con la I de Piaget e Inhelder (entre dos y cuatro años) el niño, que comienza a poder expresarse gráficamente, no tiene en cuenta las relaciones euclidianas (proporciones y distancias), ni las proyectivas (perspectivas con proyecciones y secciones), considerando solamente las topológicas. Así pues, los fallos que encontramos en los dibujos de los niños de esta edad, no se deben a una ineptitud técnica de carácter motor, sino a la falta de relaciones euclidianas y de perspectiva. La etapa siguiente, denominada por Luquet «realismo intelectual», se caracteriza por unos dibujos en los cuales las relaciones proyectivas y euclidianas están comenzando a surgir, pero todavía no hay coordinación general de los puntos de vista ni coordenadas generales. Por último, a partir de los siete u ocho años, el pensamiento operatorio configura la etapa de «realismo visual» en la que la representación gráfica se esfuerza por tener en cuenta perspectivas, proporciones y distancias.

Por lo que se refiere a la copia de figuras geométricas simples (cuadrado, triángulo, rombo, cruz, etc.), los resultados obtenidos con niños de entre dos y siete años son muy similares a los de la prueba de percepción «háptica», habiéndose encontrado las mismas etapas. En la etapa primera (dos-cuatro años) el niño comienza a discriminar y, por tanto, a copiar, figuras geométricas diferentes, sobre la base de aspectos puramente topológicos tales como dentro y fuera, continuo y discontinuo, etc. En la etapa segunda (cuatro-seis años), se empieza a distinguir entre figuras rectas y curvas, siendo al principio el niño capaz de dibujar un cuadrado, luego un triángulo y, solamente al final de la etapa, un rombo; las relaciones proyectivas y euclidianas están

comenzando a surgir, pero la composición de la figura se hace todavía por «ensayo y error», sin una imagen mental anticipada que guíe el dibujo. A partir de los seis o siete años (etapa tercera), la construcción de la forma se hace operacional, porque los niños ya no proceden por autorregulaciones de ensayo y error, sino que abstraen la forma y después dibujan de modo coordinado y reversible de acuerdo con un esquema mental previo.

De todo esto concluyen Piaget e Inhelder: «El espacio geométrico no es simplemente un calco hecho sobre un espacio físico desarrollado simultáneamente...» «La abstracción de la forma implica una reconstrucción completa del espacio físico hecha sobre la base de las propias acciones del sujeto y basada originalmente sobre un espacio sensoriomotor y, últimamente, sobre uno mental o representacional determinados por la coordinación de esas acciones»⁴.

C) *La relación de orden.* Para los autores que nos ocupan, el orden o secuencia es la tercera relación topológica básica después de las de proximidad y separación. En las cinco técnicas con que estudian el orden lineal y circular encuentran, de nuevo, tres etapas. Entre los tres y cuatro años el niño sólo es capaz de tener en cuenta relaciones topológicas simples como «junto a», pero no puede considerar las proyectivas de «izquierda-derecha». Durante la etapa segunda (cuatro-siete años), comienza a ser capaz de reproducir un orden dado, pero solamente cuando puede establecer una correspondencia visual entre el modelo y su propia copia; al final de esta misma etapa ya no necesita tal correspondencia y comprende la relación «entre». A partir de los seis o siete años, en la etapa tercera, el niño es capaz de invertir un orden gracias a una operación reversible de pensamiento.

D) *La relación de «cercamiento»*⁵. El experimento en un estudio de la comprensión de los nudos por parte de los niños,

comprensión que implica una complejidad considerable al suponer un «cerramiento» complejo en tres dimensiones. Los niños de tres, cuatro e incluso cinco años (etapa I) ni siquiera entienden cómo se forma un nudo, de tal modo que no pueden imitarlo cuando alguien lo hace junto a ellos; posteriormente, pueden describir verbalmente lo que hay que hacer, pero, en la práctica, son incapaces de pasar del aro (que supone dos dimensiones) al nudo; al final de esta etapa consiguen hacer un nudo, pero en seguida lo olvidan. Desde los comienzos de la etapa II, el niño puede copiar un nudo sin ayuda, pero basta que éste se apriete o afloje para que deje de reconocerlo, tampoco puede diferenciar los nudos verdaderos y los falsos, porque, si bien en el plano de la acción es capaz de pasar de un espacio bidimensional a uno tridimensional, en el plano de la representación sus imágenes no tienen aún la movilidad necesaria. A partir de los siete años, sin embargo, el niño establece perfectamente las semejanzas y diferencias entre los distintos tipos de nudos, valiéndose de imágenes dinámicas dirigidas por operaciones reversibles.

E) *La relación de continuidad.* Para estudiar esta última relación topológica, Piaget e Inhelder plantean a los niños cuatro problemas que suponen la comprensión del resultado final de la subdivisión máxima de una figura y la seriación de tamaños hasta llegar a la figura más grande y a la más pequeña posibles. En este caso se encuentran cuatro etapas. Durante las dos primeras y hasta los siete u ocho años, los niños sólo pueden tener en cuenta lo directamente perceptible, con una falta total de movilidad operacional, por lo que son incapaces de imaginar una figura geométrica, tal como un cuadrado, concentrada en pocos milímetros o expandida en toda la hoja, siendo también incapaces de reducir las figuras a puntos. A partir de los siete años (eta-

pa III), el niño puede realizar las operaciones de seriación y subdivisión, por lo que comprende bien los problemas relativos a las figuras reales más pequeñas y más grandes y los que suponen subdivisiones de líneas y de superficies, pero siempre que esté operando con un material real y concreto. Solamente en la etapa IV, a partir de los once o doce años, el niño podrá operar con material posible y, gracias al pensamiento hipotético deductivo, trascender la idea de subdivisiones posibles y puntos perceptibles para acceder a la noción de infinito.

III. EL ESPACIO PROYECTIVO

La segunda parte de la obra de Piaget e Inhelder (1947) es la dedicada al espacio proyectivo. Puede subdividirse, a su vez, en tres apartados: el primero de ellos se encarga de estudiar cómo se representa el niño la perspectiva de un objeto simple; el segundo aborda la investigación de la comprensión de la perspectiva de un grupo de objetos; el tercero estudia las relaciones entre las operaciones proyectivas y euclidianas mediante experimentos de secciones geométricas y rotación de superficies.

La diferencia más importante entre las relaciones topológicas, por un lado, y las proyectivas y euclidianas, por otro, está en la forma en que los diferentes objetos, figuras o partes de éstos se relacionan entre sí. Mientras que las relaciones topológicas son internas dentro de una figura u objeto, o constituyen relaciones bicontinuas simples entre dos o más figuras, las proyectivas y euclidianas pueden tener en cuenta las relaciones entre los objetos y sus representaciones, de acuerdo con sistemas proyectivos o ejes coordenados.

A) **Perspectiva de objetos aislados**

Piaget e Inhelder llevan a cabo tres

pruebas diferentes para determinar cómo se representan los niños los cambios aparentes de forma y tamaño de los objetos aislados, según el punto de vista desde el que se observan. Describimos muy brevemente esos experimentos a continuación.

A.1. *Construcción de la línea recta proyectiva.* Se parte de la base de que dibujar o imaginarse una línea recta supone tener en cuenta unas relaciones proyectivas (un sistema de puntos de vista), o unas relaciones euclidianas (un sistema de desplazamientos, distancias y medidas). El experimento consiste en pedir a los niños que hagan una línea recta con una serie de palos colocados sobre unas bases de plastilina encima de una mesa cuadrada o rectangular. Al principio (etapa I, hasta los cuatro años, aproximadamente), los niños pueden percibir y reconocer una línea recta, pero son incapaces de construirla; posteriormente construyen la línea recta paralela al borde de la mesa, sin poder neutralizar la influencia de ese borde cuando la línea no es paralela a él; por último, sobre los siete años, los niños son capaces de organizar una línea recta en cualquier sitio, mediante una técnica proyectiva o euclidiana.

A.2. *Perspectiva de objetos diversos.* Se investiga la forma en que el niño se representa ciertos objetos aislados vistos en perspectiva en términos de sus desplazamientos y en relación con un observador. Se le pide que imagine la forma que presentará un objeto, tal como un palo o un disco, cuando se coloque en cierto número de posiciones diferentes, es decir, tal como lo vería un muñeco colocado en un punto de vista diferente al suyo. Primeramente, los niños ignoran las diferencias entre las figuras y, más aún, la perspectiva geométrica (hasta los cuatro años). Después, van a ir dándose cuenta de que la apariencia de un objeto cambia

con su orientación y lo expresan mediante el reconocimiento. Solamente entre los siete y los nueve años van pudiendo expresar las diferencias de perspectiva con sus propios dibujos.

A.3. *La proyección de las sombras.* En este caso, los autores que nos ocupan piden a los niños que dibujen o reconozcan la forma que tomarán diversos objetos, colocados en diferentes inclinaciones entre una lámpara y una pantalla vertical, separadas entre sí unos pocos centímetros. Este experimento viene definido por las mismas leyes que el anterior, si bien, mientras el anterior depende únicamente de las posiciones relativas de objeto y sujeto, el que ahora comentamos implica imaginar las posiciones relativas de dos objetos: el que produce la sombra y la pantalla. Los resultados muestran que para las sombras de los objetos simples (lápiz, disco y triángulo), las etapas coinciden con las descritas para la prueba A.2. Por el contrario, en el caso de las figuras complejas (como el cono y la canilla), la dificultad es mayor porque comprenden secciones variables con la necesidad de integrar las más pequeñas en las más grandes, por lo que sólo se dibujan perfectamente hacia los once años, en el inicio del estadio de las operaciones formales.

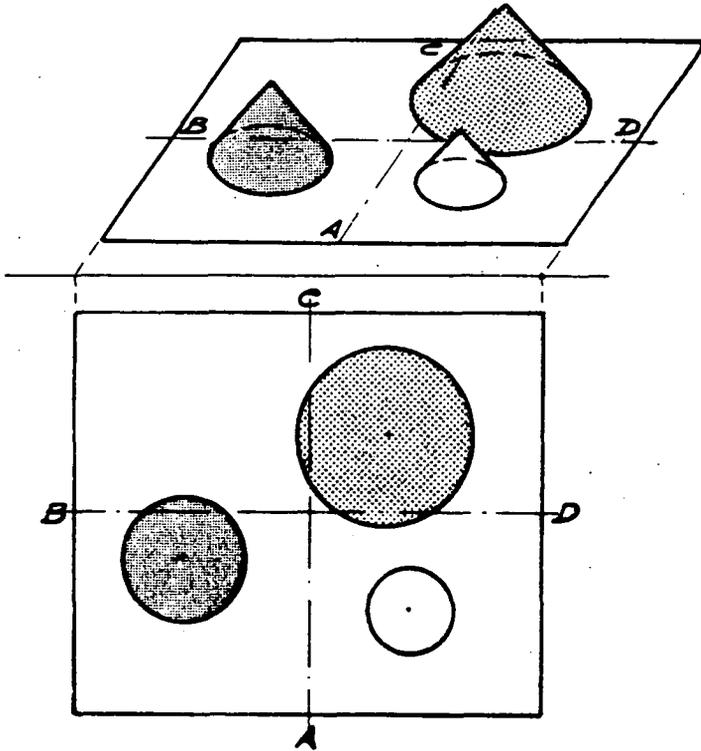
B) Coordinación de perspectivas

Se trata ahora de analizar el desarrollo de la representación de la perspectiva o apariencia que toman un grupo de objetos, considerando sus posiciones relativas entre sí y respecto al observador. Piaget e Inhelder estudian este problema con un solo experimento que se describe a continuación.

El material está formado por una cartulina de un metro cuadrado de lado y de 12 a 30 centímetros de altura, represen-

tando tres montañas de diferentes alturas y colores, 10 tarjetas de 20×28 centímetros, que representan, en dos dimensiones, las montañas desde los distintos

puntos de vista, y tres piezas de cartulina representando las montañas. Se dispone también de un muñeco de dos o tres centímetros de altura.



(FIGURA 1: Coordinación de perspectivas)

Utilizan tres métodos de interrogatorio diferentes. En el primero se le dan al niño las tres piezas de cartulina que representan las montañas, pidiéndole que reconstruya la «fotografía» que podría tomarse del grupo desde las posiciones A, B, C y D, en que se coloque el muñeco y que suponen los cuatro lados iguales de la cartulina. En el segundo, el experimentador muestra al niño los grabados y éste debe elegir el que corresponda al punto de vista en que está colocado el muñeco. Por último, en el tercer método se le da una de las tarjetas, debiendo el niño colocar el muñeco en el lugar que corresponde para ver las montañas según esa

tarjeta. También en esta prueba se encuentran tres etapas, que describimos seguidamente.

Durante la etapa I, aproximadamente hasta los cuatro años, los niños ni siquiera pueden comprender las preguntas que se les hacen. En la etapa II, desde los cuatro a los siete u ocho años, los niños son incapaces de imaginar las transformaciones debidas al cambio de posición, considerando su punto de vista, como el único posible. Esta fijación en su propio punto de vista al que Piaget denomina «error egocéntrico», no se debe a una incapacidad perceptiva, sino a un error de razonamiento que reproduce, a nivel re-

presentativo, los problemas de constancia perceptivas que encontramos en el bebé de siete u ocho meses. Durante la subetapa II B, intentan dejar a un lado su egocentrismo para tener en cuenta el punto de vista del observador, sin darse cuenta de que los cambios de punto de vista llevan consigo una inversión de las relaciones izquierda-derecha, delante-atrás, dentro de las montañas. En consecuencia, con el primero de los métodos a que nos referimos anteriormente, el niño es incapaz de tener en cuenta las relaciones internas al grupo de objetos; con el segundo, igualmente, están los niños tan convencidos de que las relaciones entre las montañas son rígidas e inmutables, que solamente consideran uno de los aspectos implicados, el punto de vista del muñeco, sin tener en cuenta las relaciones proyectivas que se dan entre el grupo de montañas. Respecto al tercero de los métodos descritos, Piaget e Inhelder nos dicen que, a pesar de que los niños se dan cuenta de que hay una posición definida para cada punto de vista, no identifican correctamente las relaciones entre posición y perspectiva.

Para estos autores, los errores egocéntricos, así como los que consisten en considerar al grupo de montañas como algo invariable, se deben a que los niños razonan mediante preconceptos incapaces de ser agrupados dentro de un sistema de transformaciones recíprocas. Como más tarde veremos, el concepto de «error egocéntrico» ha sido uno de los más discutidos dentro de la teoría que nos ocupa.

En la primera parte de la etapa III, gracias al pensamiento operatorio concreto, el niño descubre que las relaciones izquierda-derecha, delante-atrás, inherentes al grupo de montañas, varían de acuerdo con el punto de vista del observador. No obstante, al elaborar él mismo la perspectiva del conjunto, según el primero de los métodos, aún comete errores

por la influencia de su propia perspectiva, sobre todo al considerar las posiciones izquierda-derecha. Al elegir las tarjetas correspondientes a la perspectiva (método segundo), los niños, al no poder elaborar su propia construcción, están más retrasados, siendo frecuentes los errores debidos a considerar las montañas como un bloque.

C) Relaciones entre operaciones proyectivas y euclidianas

Piaget e Inhelder diseñan dos pruebas, una de secciones geométricas y otra de rotación y desarrollo de superficies, para estudiar la génesis paralela en el desarrollo ontogenético, de las operaciones euclidianas y proyectivas.

C.1. *Secciones geométricas.* La comprensión de las secciones geométricas puede elaborarse tanto desde la geometría proyectiva como desde la euclidiana. La sección euclidiana se pone de manifiesto cuando uno se imagina cómo quedará una figura geométrica al ser cortada mediante un cuchillo; la proyectiva nos lleva a imaginar la representación de la sección de una figura geométrica proyectada ante una pantalla luminosa. El experimento consistió en pedir a los niños que mirasen una serie de objetos de plastilina (cilindro, prisma, cono, paralelepípedo, pelota hueca y varios objetos complejos), e imaginasen cuál sería la forma que se produciría al cortar el sólido con un cuchillo por diferentes planos. Los resultados se distribuyen en cuatro etapas: durante la primera, los niños ni siquiera son capaces de distinguir unas formas de otras. Al comienzo de la segunda, se produce una confusión entre la sección y la forma total del objeto, mientras que posteriormente se va produciendo una diferenciación progresiva entre la sección y la forma externa, que sólo se consigue en la etapa III

para las formas más simples, y en el inicio del estadio de las operaciones formales, en el caso de las formas complejas.

C.2. *Rotación y desarrollo de superficies.* Piden a los niños que imaginen desarrollados en un plano una serie de objetos que se les muestran (cilindro, cono, cubo y tetraedro). La técnica de respuesta es, como siempre, doble: dibujo y/o reconocimiento. Los resultados son muy semejantes a los descritos en el experimento anterior, tanto para las figuras más simples como para las más complejas.

De estos dos experimentos, concluyen nuestros autores que la noción de un sólido desarrollado no es una consecuencia directa de la percepción. Entre la percepción de un sólido y la imagen de su representación en el plano, encontramos la imagen de una acción no realizada; esta imagen activa y reversible capaz de anticipar una acción y, por tanto, regida por las operaciones, está ausente en los niños pequeños y, sin embargo, presente en el pensamiento de los niños en el período de completamiento de las operaciones concretas.

IV. EL ESPACIO EUCLIDIANO

La tercera parte de la obra, tantas veces citada (Piaget e Inhelder, 1947), está dedicada a la génesis del espacio euclidiano en el niño y también a la transición de los conceptos proyectivos a los euclidianos. Así pues, se tratan en esta parte las nociones euclidianas básicas de paralelismo y semejanza, los ejes coordenados de referencia horizontales y verticales y las relaciones entre los espacios proyectivo y euclidiano en la elaboración de sistemas cartográficos. Además, en su libro *La geometría espontánea en el niño*, Piaget, Inhelder y Szeminska (1948) abordan el estudio de la capacidad que los niños tienen para conservar, medir y, en gene-

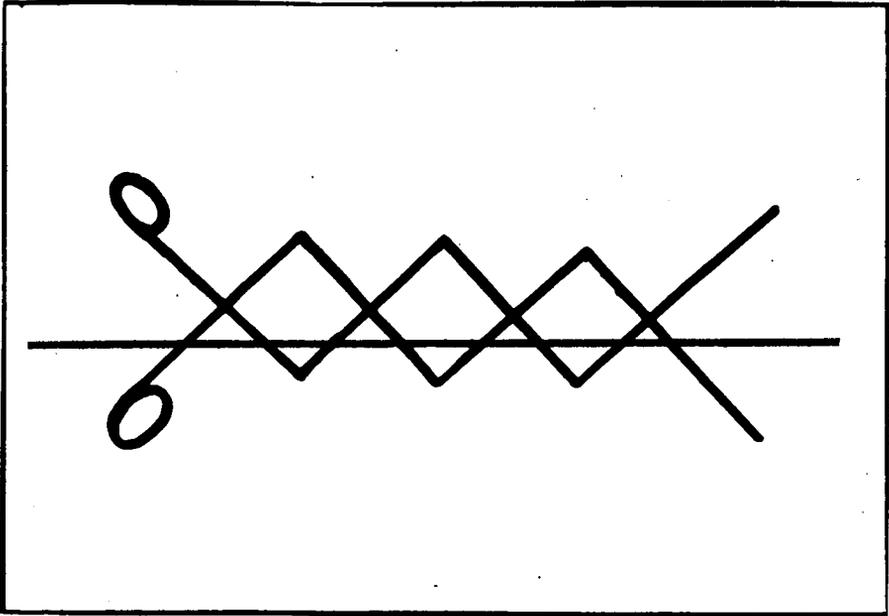
ral, tomar en cuenta entidades de la geometría euclidiana, como la distancia, la longitud, las coordenadas rectilíneas, el ángulo, la superficie y el volumen. Exponemos a continuación los experimentos contenidos en la tercera parte de la obra de 1947, y sólo una de las pruebas del libro de 1948, la denominada «medición espontánea» que puede considerarse como la más representativa y conocida del mismo.

A) Transformaciones afinitivas del rombo y conservación de las paralelas

Antes de pasar al espacio euclidiano propiamente dicho, mediante el estudio del desarrollo de los sistemas coordenados de referencia, nuestros autores analizan las nociones de paralelismo y proporciones, esenciales para el establecimiento de esos sistemas de referencia y encontradas ambas en los dibujos espontáneos de los niños.

Para estudiar la conservación del paralelismo se utiliza una figura geométrica, el rombo, que al transformarse conserva sus lados paralelos, pero no sus ángulos rectos. Esta propiedad es denominada por los geómetras «afinidad» y está a medio camino entre los conceptos proyectivos y las semejanzas. Como muestra la figura 2, el dispositivo empleado en el experimento consiste en una especie de tenacillas con una serie de barras cruzadas, de tal modo, que cuando la tijera se abre las barras se separan formando una serie de rombos, al principio, estrechos, luego más y más anchos y, al fin, de nuevo estrechos pero en el sentido contrario.

La técnica consiste en mostrar al niño el aparato cerrado y pedirle que prediga y dibuje lo que sucederá cuando las tijeras se abran; después al experimentar abre un poco el mecanismo y pide al sujeto



(FIGURA 2: Transformaciones afinitivas del rombo y conservación de las paralelas.)

que dibuje (o construya con una serie de rombos que se le proporcionan), cómo van a ser los rombos a medida que se van abriendo las tijeras. Los resultados se distribuyen en las tres etapas ya clásicas. Solamente en la tercera de ellas, a partir de los siete años, pueden los niños dibujar los rombos correctamente, conservando el paralelismo de sus lados y el tamaño correcto de los mismos.

B) Semejanzas y proporciones

Se investiga la forma en que el niño llega a comprender la similaridad o semejanza de figuras geométricas inscritas sobre la base del paralelismo de sus lados y/o de la igualdad de sus ángulos. Utilizan dos tipos de problemas: el primero, diseñado para hacer comprender al niño el paralelismo, presenta dos triángulos inscritos con sus lados paralelos; el segundo proporciona a los niños triángulos diferentes de cartulina (equilátero, isósceles, etc.), para que los clasifiquen por sus semejanzas formales. Con este último mé-

todo se deja al niño libertad para utilizar el criterio de igualdad de ángulos o el de paralelismo entre los lados, en sus comparaciones. Los resultados muestran que hasta los siete años, aproximadamente, los niños no son capaces de considerar iguales aquellos triángulos cuyos lados son paralelos, ni de suponer espontáneamente las figuras de cartón, descubriendo a esta edad que los triángulos pueden ser iguales, con independencia del tamaño de sus lados. Pero sólo hacia los once años van a poder pasar de los juicios de semejanza puramente cualitativos a la expresión de la proporcionalidad mediante cálculos y proporciones numéricas.

C) Sistemas de referencia y coordenadas horizontales y verticales

Para Piaget e Inhelder un sistema de referencia no es una simple red compuesta de relaciones de orden entre varios objetos, sino que se aplica tanto a las

posiciones dentro de la red como a los objetos que ocupan dichas posiciones; posibilitando que se mantengan invariables e independientes del desplazamiento potencial de los objetos. En este sentido, un sistema de referencia constituye un espacio euclidiano cuando es usado como un contenedor, independiente de los objetos que contiene, justamente como coordinación proyectiva de la totalidad de los puntos de vista potenciales. Así, dentro del marco teórico piagetiano, los espacios proyectivo y euclidiano son sistemas comprensivos, en contraposición con el espacio topológico que considera las relaciones internas a cada objeto como algo aislado en sí mismo. En consecuencia, estudian la manera en que los niños adquieren esos sistemas de referencia que les proporciona el mundo físico en forma de ejes horizontales y verticales.

La prueba para el estudio de los ejes horizontales consiste en proporcionar al niño dos botellas, una con los lados rectos y paralelos, y otra de lados redondeados, llenas en su cuarta parte de agua coloreada, pidiéndole que dibuje lo que ve. Para el estudio de los ejes verticales se utilizan varios métodos: en uno de ellos se coloca una línea de plomo suspendida en una jarra vacía y el niño debe predecir su colocación cuando la jarra se inclina de diferentes modos; en otros, le proporciona una montaña de juguetes y se le pide que coloque en su ladera y en su cima, postes en posición «derecha».

Los resultados muestran que en la etapa I, los niños son incapaces de distinguir planos como tales, teniendo en cuenta solamente aspectos topológicos como «en», «dentro de», etc. Así representan el agua como una especie de pelota dentro de la jarra y los postes tendidos horizontalmente sobre los lados de la montaña. Entre cuatro y cinco años y medio, el niño dibuja siempre el nivel del agua paralela al borde de la jarra, porque es incapaz de relacionarlo con un punto fijo

como el borde de la mesa. Posteriormente (entre cinco y medio y siete años), ya imaginan que el líquido se mueve en relación con la inclinación de la jarra, pero al no tener un marco de referencia estable, lo dibujan como una línea oblicua trazada entre las esquinas de la jarra. En este momento ya colocan los postes en posición vertical, pero en los dibujos permanecen perpendiculares a la montaña.

Por último, a partir de los siete años, el niño comienza a dominar, de forma gradual, sistemas de referencia generales. Al principio sólo consigue dibujar correctamente el nivel del agua cuando la jarra está tumbada sobre uno de sus lados; después se construyen los ejes horizontales y verticales, mediante ensayo y error para todas las posiciones; y, por fin, hacia los nueve años, las coordenadas se formulan en términos operacionales, aplicándose directamente a todas las situaciones. «El rasgo distintivo de esta subetapa final (III B) es la coordinación general de todos los ángulos y paralelas para todo el campo de objetos que se considere. Es este proceso el que capacita al niño para descubrir la constancia física del nivel horizontal del agua y de los postes verticales, un concepto que es eventualmente independiente de la observación experimental»⁶.

De estos experimentos concluyen Piaget e Inhelder que los sistemas de referencia no son innatos, sino que se construyen a lo largo del desarrollo y que, lejos de constituir el punto de partida de la consideración espacial, constituyen la culminación de todo el desarrollo psicológico del espacio euclidiano.

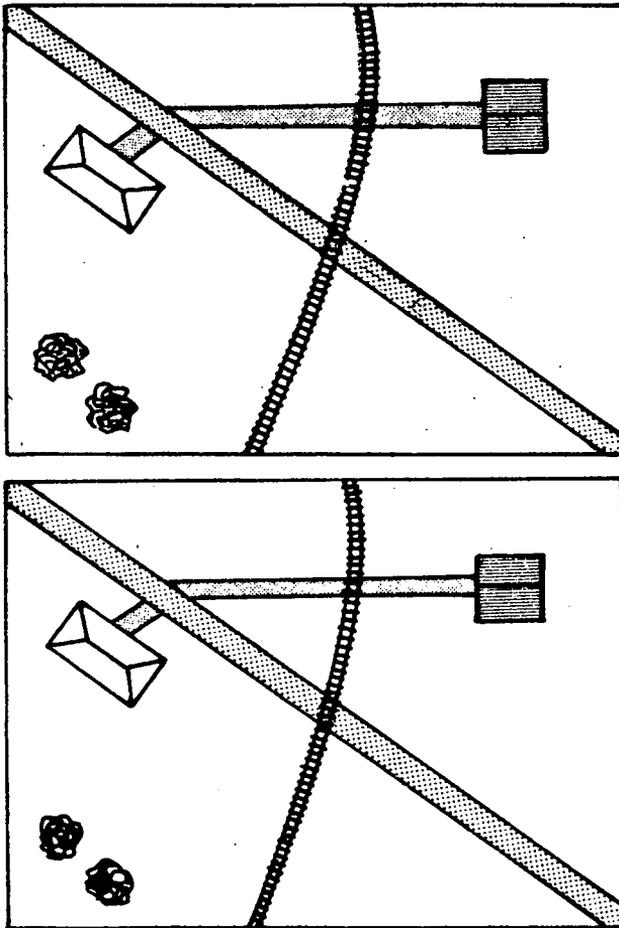
D) Trazados diagramáticos y el plano de un pueblo

Con los dos experimentos que se resumen a continuación se trata de comprobar que los conceptos proyectivos (coordinación general de los puntos de vista) y los euclidianos (construcción de los

marcos de referencia físicos) son mutuamente interdependientes y se desarrollan juntos.

D1. *Colocación de un muñeco en un modelo de aldea.* Se muestran al niño dos maquetas iguales que representan un pueblecito, semejantes a la que muestra la figura 3, y se le pide que, teniendo éste

una maqueta y otra el experimentador, coloque su muñeco en el mismo sitio y de la misma forma que el experimentador, bien con ambos modelos colocados en la misma posición, bien rotando el del niño 180° . El muñeco se sitúa en 15 posiciones diferentes de distintos grados de dificultad.



(FIGURA 3: Colocación de un muñeco en un modelo de aldea)

Durante la primera etapa se localizan las posiciones mediante relaciones topológicas de proximidad, rodeamiento o cerramiento, sin tener en cuenta las proyectivas de izquierda-derecha, arriba-abajo, delante-detrás, ni las relaciones y dis-

tancias euclidianas. Entre los cuatro y los cinco años, al comienzo de la etapa II, empiezan a establecerse ciertas relaciones referenciales, pero aún no están coordinados los distintos puntos de vista, colocándose el muñeco, ya no en relación con un

único punto de vista simple, sino respecto a dos o tres objetos. Es así como los niños empiezan a establecer relaciones de izquierda-derecha, delante-detrás, pero aún sin relacionarlas con el punto de vista, por lo que no comprenden los efectos de la rotación de uno de los modelos. En la segunda parte de esta etapa II, consiguen ir corrigiendo, por ensayo y error, los fallos de colocación del muñeco en el modelo rotado, pero guiados de un método intuitivo, todavía no operacional. A partir de los siete años (etapa III), la rotación del modelo no afecta a la precisión del niño, que tiene en cuenta el sistema de referencia que le proporciona la maqueta.

Dz. *El plano de un pueblo.* Esta prueba tiene una dificultad mayor que la anterior, puesto que consiste en poner sobre una mesa un cierto número de objetos representando un pueblecito y pedir a los niños que dibujen su colocación en una hoja de papel, tal y como se ven desde arriba en línea recta o en un ángulo de 45° . En los niños pequeños el dibujo se sustituye por la construcción real. De acuerdo con Piaget e Inhelder, el dibujar el plano implica, en la práctica, tres dificultades: 1º) la selección de un punto de vista particular, que supone problemas proyectivos; 2º) la elaboración de un sistema de coordenadas euclidianas con líneas rectas y ángulos; 3º) la reducción a una escala menor con los consiguientes problemas de semejanzas y proporciones.

Los resultados se distribuyen en cuatro etapas: durante la primera no hay correspondencia espacial ni correspondencia término a término entre los elementos (lógico-matemática). A partir de los cuatro años y hasta los siete aproximadamente, se encuentra un cierto avance hacia la coordinación de grupos de objetos, aunque las relaciones no sean todavía generales; la relación lógico-matemática queda ya establecida, pero la relación espacial aún se rige por aspectos topológicos, sin

tener en cuenta el marco de referencia, ni las dimensiones proyectivas. En la etapa III los niños son capaces de copiar perfectamente el modelo con el método de construcción real, pero aún cometen errores en el dibujo hasta los nueve o diez años, edad en que consiguen establecer correctamente las relaciones de semejanza y proporción, la medición de las distancias y la consideración simultánea de todas las relaciones del plano. Por último, a partir de los once años, el niño puede dejar de utilizar como referencia las coordenadas naturales que le proporciona la experiencia, para servirse de coordenadas convencionales abstractas; son, por tanto, las operaciones formales las que capacitan al niño para comprender los mapas y ejes coordenados abstractos que le pide el trabajo escolar.

E. *La medición espontánea.* Como ya dijimos anteriormente, la obra de Piaget, Inhelder y Szeminska (1948), está dedicada al estudio de la ontogénesis de la geometría euclidiana. También este libro se divide en tres partes. La primera de ellas se ocupa de la conservación y medición del espacio en una dimensión, con experimentos tales como la longitud y la distancia. La segunda estudia estas operaciones de conservación y medición en el espacio bidimensional, con experimentos de medida de ángulos y triángulos, la construcción de lugares geométricos, etc. Por último, en la tercera parte, los autores revisan la ontogénesis de la medida de los sólidos o del espacio tridimensional, estudiando la conservación y medida de áreas y volúmenes y el concepto de fracción. Exponemos seguidamente la prueba más conocida: medición espontánea de la longitud.

Se presenta a los niños una torre de 80 cm. hecha con 12 bloques de diferentes dimensiones (cubos y paralelepípedos) y colocada sobre una mesa. Se les pide que construyan otra «igual» o «igual de larga» sobre una mesa más baja que la anterior,

para lo que se les proporcionan bloques en mayor número del necesario y elementos susceptibles de ser utilizados como unidad de medida, tales como varillas y tiras de papel. Los resultados se distribuyen en tres etapas, si bien se encuentran seis tipos de medición siguiendo el proceso evolutivo.

Durante la primera etapa, los niños se conforman con hacer una comparación perceptiva entre el modelo y la copia, método al que Piaget y sus colaboradores denominan «transferencia visual»; no hay una medida común para las dos torres y las comparaciones de altura se hacen respecto a la línea de visión, sin tener en cuenta las alturas diferentes de las mesas. A partir de los cuatro años y medio aproximadamente (subetapa II A), encuentran nuestros autores lo que denominan «transferencia manual», puesto que los niños intentan transportar una de las torres para, de nuevo, hacer una comparación visual entre ellas. Posteriormente, hacia los seis años, ya en la subetapa II B, se encuentra un avance interesante en la utilización del propio cuerpo (las manos o los brazos) como medida: «transferencia corporal».

En el momento de transición entre las etapas II y III, hacia los seis años y medio, los niños son capaces de usar un objeto externo, como una tercera torre o una varilla, pero con la condición de que tenga la misma longitud del modelo. Así encontramos ya una transferencia o desplazamiento de carácter operativo y transitivo ($A=B$, $B=C$, luego $A=C$). A partir de los siete años, en la etapa III A, los sujetos son capaces de utilizar una regla más larga que el modelo, y solamente a partir de los ocho pueden llegar a medir como los adultos utilizando como unidad una regla más corta que transportan un cierto número de veces para comparar la torre original y la copia. Es así como en la etapa de las operaciones concretas los niños son capaces de medir

de forma operatoria haciendo una síntesis entre la partición y el desplazamiento, es decir, colocando la unidad de medida el número de veces preciso en el objeto a medir.

V. IMPORTANCIA Y REPERCUSIONES DE ESTA TEORÍA

Muchos de los autores estudiosos de la psicología evolutiva del conocimiento espacial (Hart y Moore, 1917; Dows y Stea, 1973; Hart, 1979), coinciden con nosotros en que Piaget ha sido el único autor que ha estudiado seriamente el espacio desde el punto de vista evolutivo. En este sentido afirman Hart y Moore: «En una revisión sistemática de la literatura posterior a la primera parte del siglo, nos hemos impresionado, e intentamos mostrarlo, por el hecho de que la mayoría de los datos sobre el desarrollo de la cognición espacial, incluyendo la de medios a gran escala, puede ser cómodamente explicada dentro de este punto de vista teórico. La mayoría del trabajo hecho dentro de un marco de referencia estrictamente conductista es fragmentario y no puede trazar de forma comprensiva la secuencia del desarrollo»⁷.

Así pues, la teoría de Piaget nos proporciona el único modelo teórico que relaciona, de forma satisfactoria, la evolución de la cognición espacial con el desarrollo cognitivo general. Tanto los trabajos que estudian la ontogénesis de los conceptos espaciales básicos («cognición espacial fundamental» en la terminología de Hart y Moore, 1971), como aquellos otros que investigan la forma en que dichos conceptos se plasman en la representación que los sujetos tienen de los espacios grandes (formación de mapas cognitivos o representaciones topográficas), tiene su origen en las obras de Piaget y sus colaboradores (Piaget e In-

helder, 1947; Piaget, Inhelder y Szeminska, 1948).

Como la mayoría de los trabajos piagetianos, también éste ha sido objeto de numerosas revisiones, estandarizaciones y réplicas. No vamos a entrar aquí en el análisis de estas investigaciones y remitimos al lector a la excelente obra realizada por Modgil y Modgil, en 1976, denominada *Piagetian research*. La tercera parte del segundo volumen de dicho libro está dedicada a los trabajos «Postpiagetianos» sobre el desarrollo de los espacios topológicos proyectivo y euclidiano.

Aunque recogido en la obra que se acaba de citar, merece mención especial el trabajo publicado en 1968 por Laurendeau y Pinard, dedicado a estandarizar y a revisar los aspectos fundamentales de la obra piagetiana de 1947. Replicaron cuatro de los experimentos más relevantes, prestando atención especial a la estandarización de los materiales experimentales y a la elección de muestras representativas. En las pruebas de percepción «háptica», construcción de la línea recta proyectiva, localización de lugares topográficos y coordinación de perspectivas, los resultados generales están de acuerdo con los obtenidos por Piaget e Inhelder, por lo que Laurendeau y Pinard confirman las tesis sobre la sucesión ontogenética de los espacios topológico, proyectivo y euclidiano y sobre la sucesión de las equilibraciones preoperacionales a las operacionales.

No obstante, hay también aspectos de la teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial que han sido objeto de valoraciones más o menos negativas. Uno de ellos, precisamente el considerar que el conocimiento espacial progresa desde las nociones topológicas a las proyectivas y euclidianas, ha sido muy criticado en el sentido de que se trata de una diferenciación de índole epistemológica y no psicológica. En relación con esto dicen Downs y Stea: «A menudo se toma como un hecho que el desarrollo del niño tiende hacia y debe rígidamente tender hacia el logro de conceptos estandarizados euclidianos y newtonianos del mundo. Pero a menudo se olvida que los puntos de vista euclidiano y newtoniano son efectivamente modelos de las geometrías del mundo real y sistemas físicos más que hechos dados»⁸.

Para concluir queremos únicamente poner de manifiesto otro de los conceptos más criticados dentro de la teoría que nos ocupa como es el de «error egocéntrico» que, como se dijo a propósito del experimento de la coordinación de perspectivas, es aquel que cometen los niños al considerar su propio punto de vista como el único posible. Las investigaciones de Huttenlocher y Preson (1973 y 1979) han puesto de manifiesto que tales errores no siempre son cometidos por los niños cuando hacen una tarea de rotación espacial de un conjunto de objetos, sino que dependen en gran medida, del tipo de instrucciones que reciben en la prueba.

Notas:

¹ Existen también otras publicaciones sobre espacio: Piaget, 1953, 1954 y 1955; Piaget e Inhelder, 1945 y 1948. Sobre geometría: Piaget, 1953, y Piaget y Morf, 1958.

² Respecto al problema de los estadios ver Flavell, 1963, p. 104-106, y Delval, 1978, V.1, p. 34-36.

³ Trabajos posteriores han mostrado que es perfectamente posible estudiar la percepción visual en los primeros momentos de la vida del niño, como los de Fantz, 1961, y Bower, 1974.

⁴ Piaget e Inhelder, 1947, p. 77, ed. inglesa.

⁵ Traducimos «surrounding» por cercamiento o rodeamiento.

⁶ Piaget e Inhelder, 1947, p. 412.

⁷ Hart y Moore, 1971. En Downs y Stea, 1973, p. 247.

⁸ Downs y Stea, 1973, p. 224.

Referencias:

- BOWER, T.: *Development in Infancy*. Freeman and Company, 1974. Ed. castellana: El desarrollo del niño pequeño, Madrid, Debate, 1979.
- DELVAL, J.: *Lecturas de psicología del niño*. Madrid, Alianza U. Textos, 1977.
- DOWNES, R. M. & STEA, D. (Eds.): *Image and Environment*. Chicago, Aldine Publishing Company, 1973.
- HUTTENLOCHER, J. & PRESSON, C.: Mental rotation and the perspective problem. *Cognitive Psychology*, 1973, 4, 279-299.
- HUTTENLOCHER, J. & PRESSON, G.: «The coding and transformation of spatial information». *Cognitive Psychology*, 1979, 11, 375-394.
- FANTZ, R. L.: «El origen de la percepción de la forma». En: *Psicobiología evolutiva*. Barcelona, Fontanella, 1976, 81-89.
- FLAVELL, J.: *The developmental psychology of Jean Piaget*. Princeton, Van Nostrand, 1963. Ed. castellana: La psicología evolutiva de Jean Piaget. Buenos Aires, Paidós, 1968.
- HART, R.: *Children's experience of place*. New York, Irvington Publisher Inc., 1979.
- HART, R. & MOORE, G.: «The development of spatial cognition: A review, 1971». En Downes, R. M. & Stea, D. *Image and Environment*. Chicago, Aldine, 1973.
- LARENDEAU, M., PINARD, A.: *Les premières notions spatiales de l'enfant*. Delachaux et Niestlé, 1966.
- LUQUET, G. H.: *Le dessin enfantin*. Paris, Alcan, 1927. Ed. castellana: El dibujo infantil. Barcelona, A. Redondo Ed., 1972.
- MODGH, S. & MODGH, C.: *Piagetian Research*. Windson, Nfer Publishing Company, 1972.
- PIAGET, J.: «How children form mathematical concepts». *Scien Amer*, 1953, 189 (5), 74-79.
- PIAGET, J.: «Perceptual and cognitive (or operational) structures in the development of the concept of space in the child». *Pro. 14 Congress Psychology*. 1954, 41-46.
- PIAGET, J., INHELDER, B.: «Expériences sur la construction projective de la ligne droite». *Cath. Pédag. Exp. Psychol. Enfant*. 1945, n.º 2.
- PIAGET, J., INHELDER, B.: *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris, P.U.F., 1947. Trad. inglesa: The child's conception of space, London, Routledge & Kegan Paul, 1956, 1971.
- PIAGET, J., INHELDER, B.: «La role des opérations dans le development de l'intelligence». *Proc. 12 Int. Congr. Psychol.*, 1948, 102-103.
- PIAGET, J., INHELDER, B., SZEMINSKA, A.: *La géométrie spontanée chez l'enfant*. Paris, P.U.F., 1948. Trad. inglesa: The child's conception of geometry. London, Routledge & Kegan Paul, 1960, 1966.
- PIAGET, J., MORF, A.: «Les isomorphismes partiels entre les structures logiques et les structures perceptives». En Brunner, J. S., Bresson, F., Morf, A., y Piaget, J.: *Logique et perception. Etudes d'epistemologie génétique*. Vol. 6. Paris, Press Universitaire, 1958, 117-155.

Resumen

Este artículo presenta un resumen de la teoría de Piaget y sus colaboradores sobre el conocimiento del espacio. En primer lugar se analizan los aspectos principales de la teoría del desarrollo de las nociones espaciales en relación con el desarrollo cognitivo; se continúa con la descripción de los tipos de experimentos utilizados para el estudio del espacio topológico, espacio proyectivo y espacio euclidiano; se concluye poniendo de manifiesto la relevancia del trabajo piagetiano sobre las posteriores investigaciones acerca de la cognición espacial.

Abstract

This paper makes a summary of theory on spatial knowledge as developed by Piaget and col. First of all the main issues of this theory are discussed and related to the general theory of cognitive development. The paper then gives a description of the types of experiments used for the study of topologic, projective and eucliden space. It concludes emphasizing the relevance of piagetian work on later research on this subject.

Résumé

Cet article présent un résumé de la théorie de Piaget et ses collaborateurs sur la connaissance de l'espace. Premièrement on analyse les aspects principaux de cette théorie à l'égard du développement cognitif; après on fait une description des types de experiment utilisé pour l'étude de l'espace topologique, projective et euclidien; et finalement on conclue soulignant la rélevance du travail piagetien pour les recherches ultérieures su la cognition spatiale.