Rev. de Psicol. Gral. y Aplic., 1991, *44* (2), 175-182

MODELOS DE RAZONAMIENTO EN DOS TAREAS DE PROPORCIONALIDAD

J. A. ACEVEDO; J. P. BOLÍVAR; E. J. LÓPEZ-MOLINA; M. TRUJILLO
Universidad de Sevilla (ICE)

Resumen

En este trabajo se proponen dos tareas para evaluar la competencia/actuación en el esquema operatorio de la proporcionalidad. Estas pruebas, de papel y lápiz y con respuesta abierta, se han administrado colectivamente a una población de más de un millar de escolares de EE.MM., de 14 a 19 años. Asimismo, se describen las estrategias y procedimientos comunes seguidos por los estudiantes, los cuales permiten hacer una tipología de respuestas relacionadas con el pensamiento formal/concreto, así como la correspondiente clasificación piagetiana.

Abstract

In this work we resume the main results obtained from analysis of two paper-and-pencil Piagetian tasks in order to evaluate the subjects' ability/performance in the operative scheme of the proportionality. The tasks, carried out in classroom, were presented to over a thousand Secondary Level pupils (14 to 19 years-old). The analysis of students' strategies and procedures allows to make a typologie of the responses, relationed with the formal/concrete reasoning level, and a piagetian classification of subjects in proposed. Implications for teaching are also discussed.

Introducción

Según la teoría de Piaget, alrededor de los 15 años los adolescentes empiezan a ser capaces de resolver problemas más o menos complejos una vez que su desarrollo evolutivo ha culminado en la adquisición de la competencia formal lógico-matemática, descrita ésta en términos de una estructura de conjunto de la que se desprenden los esquemas operatorios necesarios para resolver correctamente tareas específicas. Uno de esos esquemas, que deriva directamente del grupo de Klein de las cuatro transformaciones o grupo INRC, es el de la proporcionalidad, con el que también se relacionan directamente la probabilidad, la correlación y las compensaciones multiplicativas.

Las estrategias proporcionales pueden ser útiles en la resolución de algunas situaciones de la vida cotidiana; además, son básicas para la comprensión de otros aprendizajes como, por ejemplo, para poder interpretar gráficos y escalas. Desde nuestra perspectiva, el razonamiento proporcional resulta necesario, en sus diversas variantes, para el reconocimiento de las relaciones existentes entre variables, así como para establecer y dar significado a las expresiones de las funciones en forma matemática, lo que nos parece imprescindible para el desarrollo de numerosas cuestiones del currículum de ciencias en las Enseñanzas Medias: movimientos y fuerzas, electricidad, leyes ponderales de las reacciones químicas, nociones básicas de estequiometría, etcétera.

La comprensión tardía de la noción de proporcionalidad ha sido explicada por Inhelder y Piaget (1955) considerando que, con anterioridad al dominio de las relaciones métricas, cuantitativas y precisas, es necesaria una aproximación cualitativa en forma de compensaciones que utilizan equivalencias y proporciones lógicas. Ahora bien, aunque no es difícil estar de acuerdo con el proceso evolutivo que proponen dichos investigadores ginebrinos, confirmado en otros trabajos (Karplus, Pulos y Stage, 1980; Noelting, 1980 a, b), no nos resulta admisible aceptar que, a partir de la adolescencia, puedan resolverse de una manera general los problemas relacionados con las proporciones. Esto último puede entenderse mejor si tenemos en cuenta que la teoría piagetiana, de carácter epistemológico y enfocada hacia una descripción de las estructuras cognitivas generales, es fundamentalmente una teoría de la competencia, mientras que el análisis de la forma en que los escolares resuelven tareas concretas supone adentrarse en la problemática de la actuación de éstos. Esta distinción entre competencia y actuación, incorporada al estudio del desarrollo cognitivo por Flavell y Wohlwill (1969) ha sido repetidamente citada en la literatura castellana sobre el tema (Carretero, 1980 a, b, 1985; Pozo y Carretero, 1986, 1987).

Por otra parte, parece razonable admitir que la utilización correcta de la proporcionalidad puede hacerse más o menos fácilmente según se trate de proporciones directas o inversas, así como que las cantidades puestas en juego en la comparación de las razones sean números sencillos o no (Hart, 1978 a, b; Vergnaund, 1983). La importancia del contexto de la tarea también ha sido destacada, en una revisión de la resolución de problemas de proporcionalidad, por Tourniaire y Pulos (1985). La bibliografía sobre estas y otras dificultades, y su influencia en la elección de los procedimientos empleados por los estudiantes adolescentes más jóvenes, tiene una cierta tradición en el extranjero (Karplus y Karplus, 1972; Karplus, Karplus, Formisano y Paulsen, 1977; Karplus, Pulos y Stage, 1983 a, b), y comienza a ser más frecuente en España (Corral, 1987; Gomez Granell, 1987; Pérez Echevarría, 1987; Pérez Echevarría, Carretero y Pozo, 1986). Sin embargo, son bastantes escasos los trabajos referentes a adolescentes mayores, estudiantes de Enseñanzas Medias, precisamente aquellos para los que la teoría piagetiana preconiza una competencia cognitiva formal incipiente o plena (Corral, 1986; Farrell y Farmer, 1985).

Objetivos y metodología empleada

De acuerdo con las tendencias actuales en los estudios del desarrollo cognitivo, parece aconsejable adoptar un planteamiento analítico que investigue los procedimientos que emplean los escolares en la resolución de tareas específicas. Ahora bien, para que el método propuesto no conduzca a una excesiva parcelación de modelos, únicamente útiles para cada tarea, no debe perderse la visión de conjunto, por lo que es importante tratar de encontrar aquellas estrategias comunes que puedan resultar adecuadas para explicar la mayor variedad de casos posibles.

En esta línea, dada la relevancia curricular del estudio de la proporcionalidad, nos hemos marcado como objetivo el análisis de las respuestas a dos tareas de razonamiento proporcional, una del tipo lineal de primer grado y otra de carácter trilineal que incluye la proporcionalidad inversa como compensación multiplicativa, con el fin de tipificar las correspondientes tipologías de procedimientos, las cuales pueden resultar útiles en el aula para conocer los significados que los escolares atribuyen a los contenidos, así como las principales dificultades que surgen en la resolución de problemas relacionados con las proporciones.

La muestra investigada ha sido de 1.006 estudiantes, entre 14 y 19 años, con una edad media de 16 años, que realizaban estudios de Enseñanzas Medias durante el curso 1987-1988 en la zona de Huelva capital y provincia. Estos escolares, pertenecientes en su inmensa mayoría a clases sociales media y media-baja, corresponden a dos institutos de Bachillerato (N = 639), situados en barriadas urbanas de la capital con características similares, un instituto de Bachillerato rural (N = 70) y otro más de Formación Profesional (N = 297), también rural. Por cursos se distribuyen en 1.° BUP (N= 144), 2.° BUP (N = 453), 3.° BUP-Ciencias (N = 112), 1.° FP-I (N = 160), y 2.° FP-I (N= 137), estos dos últimos casos de las Ramas Administrativa, Automoción y Electricidad.

Las tareas propuestas son pruebas de papel y lápiz para administración colectiva en las que se piden, además de los cálculos correspondientes, las explicaciones verbales y/o simbólicas del proceso seguido en su resolución. La realización de las mismas se hizo en condiciones ordinarias de aula, pasándolas los autores de este trabajo en sus grupos habituales de alumnos, contando con la colaboración de otros profesores, que recibieron las instrucciones necesarias, para el caso de los demás grupos. Con el fin de garantizar la uniformidad de criterios en el análisis de las respuestas, éste fue realizado íntegramente por nosotros, alcanzándose el consenso en los casos más difícilmente interpretables.

El método de análisis seguido consistió básicamente en la descripción pormenorizada de cada tipo de respuesta encontrada, agrupándolas después en procedimientos más amplios que podían englobar diversas formas equivalentes de las respuestas anteriores. Posteriormente, estas estrategias fueron interpretadas en forma de una tipología evolutiva, que contrastamos con datos de la bibliografía para identificar características propias de los niveles piagetianos referentes al pensamiento formal-concreto, aunque con cierta reserva en algunos casos. Finalmente, también realizamos una clasificación piagetiana en el razonamiento proporcional con el fin de utilizarla en otras investigaciones de aula.

La tarea ALTO-CORTO

Una de las proporciones matemáticas de interés viene dada por la métrica representada por la igualdad de dos razones numéricas. En relación con este caso, puede plantearse el problema de hallar el cuarto componente de la equivalencia. Nosotros hemos investigado esta cuestión mediante la tarea conocida como ALTO-CORTO (Karplus et al., 1977), cuya versión castellana, en uno de sus modos de presentación, ha sido publicada por Aguirre de Cárcer (1981, 1985).

Esta tarea ha sido estudiada en Estados Unidos, incluyendo el efecto que puede producir el método utilizado y el formato de presentación de la misma en las respuestas de los alumnos. Staver y Pascarella (1984) concluyeron que ninguno de los dos factores influyen significativamente en las respuestas de los estudiantes, lo que garantiza una cierta validez. En nuestro caso empleamos un procedimiento de administración colectiva del problema en forma de prueba de ensayo de papel y lápiz, con respuesta y explicación abierta a partir de un formato con ilustración. Los alumnos tenían que medir con clips encadenados la altura de un muñeco dibujado (4 clips), cuyo valor es de 6 botones, para luego tener que predecir en clips la altura de otra figura semejante, que no está dibujada, de la que se sabe que tiene 9 botones de altura. Para realizar las medidas se facilitó a cada estudiante una cadena de 7 clips.

Análisis de las respuestas a la tarea ALTO-CORTO

En la tabla 1 se refleja la tipología de procedimientos que hemos elaborado a partir de las respuestas dadas a la tarea ALTO-CORTO. Los resultados encontrados (Fig. 1) confirman plenamente lo que ya habíamos anticipado en otro lugar para una muestra más reducida correspondiente a un contexto escolar más restringido (Acevedo, Bolívar, Sánchez-Laulhé y Trujillo, 1987a).

TABLA 1

Grupo de procedimientos encontrados en la tarea ALTO-CORTO (N = 951) (*)

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa %
1. ÉXITOS	730	76,8
1.1. Proporcionalidad. Regla de tres.	599	63,0
1.2. Equivalencia botones-clips.	82	8,6
1.3. Doble-mitad.	49	5,2
2. FRACASOS	221	23,2
2.1. Aditivo-sustrativo.	137	14,4
2.2. Cualitativos-intuitivos.	69	7,3
2.3. Sin respuesta.	15	1,6

(*) Un grupo de 55 alumnos de F.P. no realizó esta tarea.

Las estrategias de resolución utilizadas por los alumnos nos ha permitido hacer una clasificación en términos piagetianos, asignando como máximo el nivel 3A, formal inicial, de acuerdo con el hecho de que el razonamiento proporcional exigido por la tarea no supone el dominio absoluto del esquema de proporcionalidad del estadio formal, ya que sólo son necesarias las habilidades correspondientes a la proporcionalidad directa de primer grado (Farmer, Farrell, Clark y McDonald, 1982).

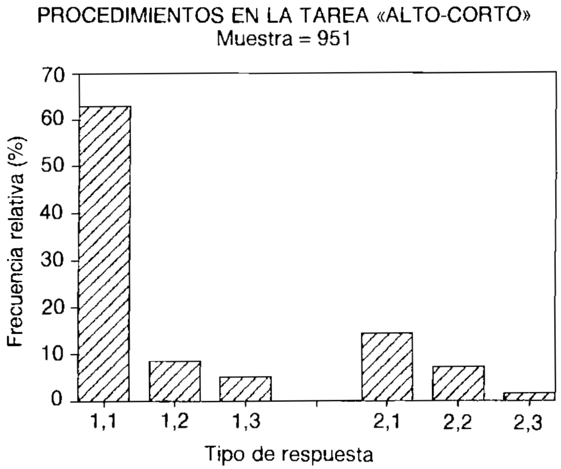

Figura 1. Frecuencias relativas de los procedimientos encontrados en la tarea ALTO-CORTO.

De los procedimientos que conducen al éxito, la *regla de tres* o la *razón de proporcionalidad* es, con mucho, el más frecuente (63,0 por 100). Hemos asignado el nivel 3A a los escolares que han utilizado esta forma de resolución. Otros procedimientos, que también permiten resolver correctamente la tarea, son la comparación entre los clips manejados y los botones ausentes (8,6 por 100), buscando la equivalencia por estimación, a veces gráficamente, y la que hemos denominado estrategia de *doble-mitad* (5,2 por 100), mediante la cual se agrupan los botones imaginarios en grupos de tres haciéndoles corresponder los clips en grupos de dos, o bien se resalta que el Sr. Alto mide, en botones, una mitad más que el Sr. Corto, por lo que debe suceder lo mismo en clips. Estos últimos procedimientos son menos generales que el primero, presentando cierto carácter iterativo, que podrían dificultar o impedir la resolución correcta de tareas de proporcionalidad más complejas que la analizada, por lo cual los hemos clasificado como propios del nivel 2B, concreto avanzado, aunque también podrían considerarse de transición entre los niveles concreto y formal.

De las estrategias correspondientes claramente a un nivel concreto destaca el procedimiento *aditivo-sustrativo* (14,4 por 100). En este caso, como la altura del Sr. Corto contiene más botones que clips, los estudiantes restan la cantidad extra a la altura, en botones, del Sr. Alto para obtenerla así en clips. Alternativamente, se obtiene el mismo resultado incorrecto al comparar las alturas, en botones, del Sr. Alto y del Sr. Corto y asociar este resultado directamente con la misma diferencia en clips. Es relevante el hecho de que en ambos casos se establezcan sumas y diferencias indistintamente con unidades homogéneas y heterogéneas, pasando esta incongruencia inadvertida en el razonamiento concreto. Aunque Piaget ha señalado esta estrategia como característica del nivel 2B (Inhelder y Piaget, 1955), sus consideraciones se refieren a una tarea mucho más compleja, la de la BALANZA, en la que la proporcionalidad utilizada es inversa. Dada la naturaleza del problema propuesto por nosotros, hemos asignado el nivel 2A, concreto inicial, a los sujetos que han utilizado este procedimiento *aditivo-sustrativo*, lo que está de acuerdo con el criterio expresado por otros autores (Farrell y Farmer, 1985). Finalmente, hemos detectado otras respuestas con estimaciones cualitativas o en las que se realizan cálculos ilógicos, que llamaremos procedimientos cualitativos e intuitivos (7,3 por 100) y que también hemos clasificado en el nivel 2A.

La tarea del ARQUITECTO

Como es sabido, el concepto de volumen presenta diversas propiedades cuya comprensión evolutiva supone un amplio período del desarrollo cognitivo que va desde la infancia a la adolescencia. Por una parte, puede considerarse como una magnitud que permite estimaciones aproximadas, comparaciones y operaciones de medición en distintas situaciones cotidianas. Desde este punto de vista destacamos el aspecto físico de la noción de volumen considerado como un todo, esto es, unidimensionalmente, no precisando del conocimiento de fórmulas matemáticas. Sin embargo, desde otra perspectiva, el volumen aparece como una magnitud tridimensional, con propiedades ligadas al trilinealismo, las cuales permiten analizar las dificultades que plantea su aritmetización. El volumen resulta así un ejemplo ilustrativo de las *estructuras multiplicativas*, extensamente estudiadas por Vergnaud (1983, 1985), y más concretamente de la denominada *producto de medidas* que está presente en los problemas de proporciones múltiples en los que una variable depende linealmente de otras variables independientes entre sí.

En este trabajo nos hemos ocupado del segundo de los aspectos mencionados, centrándonos en el análisis de las respuestas a la resolución de una tarea en la que aparecen interrelacionados volumen, superficie, conservación métrica y razonamiento proporcional. El problema en cuestión, que hemos denominado la tarea del ARQUITECTO, aparece publicado en una obra de Aguirre de Cárcer (1985). Se trata de una prueba de ensayo de papel y lápiz en la que hay que averiguar la altura de un edificio paralelepípedo a construir en una parcela rectangular (3×2) dibujada, sabiendo que aquél debe contener los mismos módulos, en forma de cubos ($1 \times 1 \times 1$), que sirvieron para la construcción de otro edificio, también paralelepípedo ($5 \times 4 \times 3$), cuya figura aparece dibujada utilizando siempre la misma escala.

El procedimiento correcto más general para resolver el problema supone calcular el número de módulos a partir del volumen, tener en cuenta su conservación y aplicar la compensación multiplicativa relacionada con la proporcionalidad inversa entre la superficie de la parcela y la altura que hay que averiguar para el edificio a construir. La tarea supone, pues, mucho más que una simple compensación, la cual se funda directamente en relaciones cualitativas y lógicas, exigiendo el dominio del razonamiento proporcional en una forma comparable, aunque en contextos muy diferentes, a como lo hacen las tareas de física de la BALANZA o la PROYECCIÓN DE SOMBRAS propuestas por Inhelder y Piaget (1955).

Análisis de las respuestas a la tarea del ARQUITECTO

Los principales grupos de procedimientos que hemos encontrado en las respuestas a la tarea del ARQUITECTO aparecen recogidas en la tabla 2. Los resultados obtenidos (Fig. 2) se encuentran también en correspondencia con los que anunciamos en otra ocasión a partir de una muestra más reducida y en un contexto de aula menos amplio (Acevedo, Bolívar, Sánchez-Laulhé y Trujillo, 1987b).

TABLA 2

Grupo de procedimientos encontrados en la tarea del ARQUITECTO (N = 1006)

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa %
1. ÉXITOS TOTALES	407	40,5
1.1. Procedimientos generales de cálculo y proporcionalidad inversa.	275	27,3
1.2. Procedimientos iterativos de cálculo y proporcionalidad inversa.	120	11,9
1.3. Procedimiento tipo «puzzle».	12	1,2
2. ÉXITOS/FRACASOS PARCIALES	175	17,4
2.1. Procedimientos generales de cálculo y no siguen o fallan en la parcela.	38	3,8
2.2. Procedimientos iterativos de cálculo y no siguen o fallan en la parcela.	17	1,7
2.3. Procedimientos erróneos en el cálculo del volumen y estrategia correcta en la parcela.	120	11,9
3. FRACASOS TOTALES	424	42,1
3.1. Procedimientos erróneos en el cálculo del volumen y no siguen o fallan en la parcela.	111	11,0
3.2. Conservan la altura.	61	6,1
3.3. Confusos o intuitivos.	78	7,8
3.4. Cualitativos.	61	6,1
3.5. Tipo «puzzle» mal resuelto.	17	1,7
3.6. Sin respuesta.	96	9,5

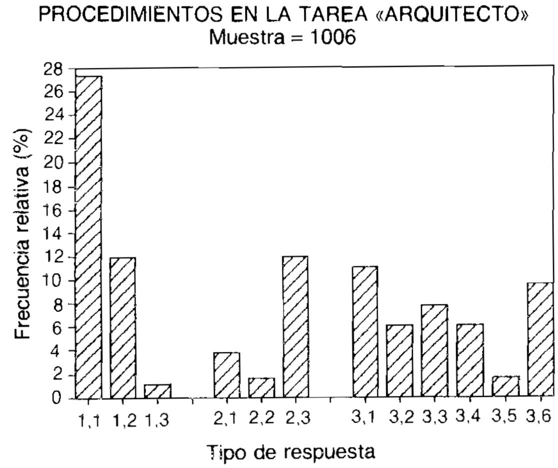

Figura 2. Frecuencias relativas de los procedimientos encontrados en la tarea ARQUITECTO.

Una clasificación más simple de las estrategias utilizadas puede verse en la tabla 3, en donde se indica si los alumnos han abordado el problema por subtareas (67,7 por 100), o no (22,8 por 100), y con qué frecuencia se obtiene un éxito completo o parcial, o bien, si se fracasa totalmente en la resolución correcta del problema, así como los casos sin respuesta (9,5 por 100).

TABLA 3

Resultados globales de las estrategias generales en la tarea del ARQUITECTO

Tipo de estrategia	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa %
1. ABORDAN POR SUBTAREAS	681	67,7
1.1. Con éxito total.	395	39,3
1.2. Con éxito/fracaso parcial.	175	17,4
1.3. Con fracaso total.	111	11,0
2. OTRAS ESTRATEGIAS	229	22,8
2.1. Con éxito total.	12	1,2
2.2. Con fracaso total.	217	21,6
3. SIN RESPUESTA	96	9,5

Entre los que han culminado con éxito la tarea (40,5 por 100), predominan aquellos procedimientos generales de cálculo del número de módulos en el edificio construido, bien operando directamente con las dimensiones (largo × ancho × alto) o, más frecuentemente, hallando primero la superficie de una planta y multiplicando luego por el número de ellas. Después calculan la superficie de la parcela para, finalmente, hacer la conservación métrica de los módulos, lo cual supone la proporcionalidad inversa entre la superficie de la parcela y la altura que tendrá el nuevo edificio. Los escolares que han seguido este método de resolución (27,3 por 100), incluidas sus diversas variantes, los hemos clasificado en el nivel 3B, formal avanzado.

Otras dos alternativas han permitido resolver también correctamente el problema. En la primera, similar como estrategia por subtareas a la comentada anteriormente, la diferencia estriba en que los cálculos o estimaciones se hacen por procedimientos iterativos, los cuales a veces pueden aparecer combinados con otros más generales. Por ejemplo, se calculan los modulos de una planta, sumándose después éstas, o bien se divide el edificio en trozos o en columnas, contándose a continuación, etc. Lo mismo puede suceder al determinar la altura del edificio a construir. La segunda alternativa supone una estrategia de resolución más global, en la que se intentan encajar superficies como la de la parcela en el edificio construido hasta llenarlo completamente; luego se suman o cuentan, averiguándose de esta manera el número de plantas necesarias para el nuevo edificio, conociéndose así su altura. En ambos casos, subtareas con procedimientos iterativos (11,9 por 100) y procedimiento tipo *puzzle* (1,2 por 100), hemos asignado un nivel 3A, porque consideramos que aún no se ha conseguido la suficiente generalización operativa como para lograr el éxito en la resolución de situaciones similares que sean algo más complejas.

Los errores que han originado el fracaso parcial (17,4 por 100) o total (11,0 por 100) en la resolución del problema, cometidos por aquellos estudiantes que han establecido una estrategia por subtareas, se refieren a la estimación del número de módulos en el edificio construido y/o a los que pueden instalarse en la parcela nueva. Con referencia al primer tipo de error hay que destacar la utilización de un procedimiento de tipo superficie lateral (19,1 por 100) como alternativa al volumen, si bien las respuestas pueden ser variadas, incluyéndose las que sólo consideran la superficie de las fachadas visibles (mitad de la superficie lateral), dichas superficies por separado, la superficie de una sola fachada o bien la superficie lateral total descontando o no tres módulos por cada esquina. Pensamos que esta actuación puede explicarse por el hecho de que los alumnos que utilizan tal procedimiento atribuyen significados distintos a los volúmenes de los cuerpos macizos y huecos, no considerando que pueda medirse con las mismas unidades. Esta dificultad no es superable por los sujetos del estadio concreto, por lo que han sido clasificados en el nivel 2B cuando no tenían dificultades con la subtarea de la parcela, y 2A cuando además fracasaban en la última parte de la tarea o no la completaban.

Los errores en la estimación del número de módulos de la parcela a construir son menos frecuentes, pero una vez más resulta significativa la pérdida de una dimensión al utilizarse un procedimiento de tipo perímetro (6,1 por 100) en sustitución del cálculo de una superficie, incluyéndose respuestas que dan la mitad del perímetro, dos lados separados, e incluso un único lado. Todas estas equivocaciones resultan coherentes con las reflejadas en el cálculo del volumen previo, si bien ahora las dificultades son menores, probablemente porque la aritmetización de la superficie presenta menos problema que la del volumen y, también, por la sencillez de las dimensiones de la parcela. Nosotros hemos asignado el nivel 2B a aquellos pocos alumnos que, habiendo completado con éxito la determinación del número de módulos a conservar, fallaban en esta parte final del problema propuesto o no la hacían. En la tabla 4 se resaltan algunos de los detalles relevantes que hemos comentado en torno a las respuestas dadas a la tarea.

TABLA 4

Algunos detalles relevantes de las respuestas a la tarea del ARQUITECTO (N = 1006)

Observación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa %
1. Obtienen el número correcto de módulos del edificio.	453	45,0
2. Obtienen el número correcto de módulos de la parcela.	515	51,2
3. Utilizan la proporcionalidad inversa en la conservación del número de módulos.	546	54,3
4. Procedimientos de superficie lateral o mitad de la misma (fachadas visibles) para obtener los módulos del edificio.	192	19,1
5. Procedimientos de tipo perímetro o semiperímetro para obtener los módulos de la parcela.	61	6,1

Finalmente, un grupo de procedimientos diversos, que han conducido al fracaso total en la resolución del problema y en los que no se hace uso de una estrategia por subtareas, los hemos clasificado en el nivel 2A. Dentro de éstos resaltaremos los que simplemente conservan la altura, presentando problemas en la interpretación del significado de escala (6,1 por 100), los que hacen estimaciones cualitativas (6,1 por 100) y aquellos que utilizan un procedimiento iterativo de tipo *puzzle*, ya comentado anteriormente, pero ahora con resultados incorrectos (1,7 por 100). Otros casos intuitivos, confusos, etc., los hemos considerado en un mismo grupo (7,8 por 100).

Una clasificación piagetiana en el razonamiento proporcional

Una vez analizados los principales resultados obtenidos en cada una de las tareas propuestas, así como los criterios seguidos en la asignación de niveles piagetianos a las mismas, es posible la elaboración de una clasificación tentativa en el razonamiento proporcional como la de la tabla 5.

TABLA 5

Clasificación global en niveles piagetianos en base a los resultados obtenidos en las tareas ALTO-CORTO y del ARQUITECTO

ARQUITECTO \ ALTO-CORTO	3A	2B	2A
3B	3B	3A	2B
3A	3A	3A	2B
2B	2B	2B	2B
2A	2B	2B	2A

La clasificación anterior, que está sujeta a las limitaciones que conlleva cualquier decisión en este terreno, precisa de algunos comentarios. El nivel formal avanzado (3B) se ha asignado exclusivamente a los sujetos que alcanzan éxito total en cada tarea, utilizando en ambas las estrategias de resolución de mayor elaboración intelectual: regla de tres/proporcionalidad en ALTO-CORTO y procedimientos generales de cálculo-conservación métrica-proporcionalidad inversa en ARQUITECTO. Asimismo, el nivel concreto inicial (2A) se ha dado únicamente en aquellos casos en los que el fracaso en la resolución de cada uno de los problemas ha sido total. Finalmente, en las demás combinaciones posibles hemos adscrito niveles intermedios (3A o 2B), primando los resultados obtenidos en la tarea ARQUITECTO frente a los de la prueba ALTO-CORTO, dada la mayor exigencia de aquélla en cuanto a las operaciones formales puestas en juego en su resolución.

En estos últimos casos pueden aparecer asignaciones discutibles o especialmente difíciles. Por ejemplo, la clasificación como concreto avanzado de la combinación 3B/2A puede justificarse considerando que el fracaso total en la resolución de la tarea ALTO-CORTO está manifestando deficiencias en el esquema operatorio de la proporcionalidad, a pesar del éxito obtenido en la prueba más compleja. En cualquier caso, cabe resaltar que el número de individuos correspondientes a esta situación es mínimo y nada relevante en comparación con el global de la muestra considerada. También puede señalarse, aunque nosotros no hemos tomado esta decisión, que algunas situaciones más difícilmente clasificables como 2B/3A y 2B/2A, pueden estimarse como de transición entre estadios concretos y/o formales (Corral, 1986, 1987; Lawson, 1978) sin que por ello se alteren profundamente los criterios generales que hemos propuesto.

Conclusiones e implicaciones educativas

Los resultados presentados en este trabajo ponen de manifiesto que, en las Enseñanzas Medias, hay un porcentaje importante de estudiantes que aún no han incorporado plenamente el razonamiento proporcional a sus esquemas operatorios cognitivos. Incluso en el caso más sencillo, correspondiente a las proporciones directas de primer grado, casi una cuarta parte de los sujetos de la muestra investigada manifiestan una actuación bastante alejada de lo que podría considerarse como aceptable en estos niveles educativos. Las deficiencias observadas son mucho mayores cuando se introduce la proporcionalidad inversa dentro de un contexto que incluye la noción métrica del volumen, aún presentando éste una forma y dimensiones relativamente sencillas como en el problema propuesto. Las actuaciones satisfactorias descienden ahora hasta aproximadamente las dos quintas partes de los escolares, si bien podemos admitir que alrededor de la mitad de todos los individuos de la muestra utilizan la proporcionalidad inversa.

Estos hechos nos llevan necesariamente a reconsiderar nuestra actividad en el aula de ciencias. En primer lugar, dada la importancia fundamental del razonamiento proporcional en dicho contexto, parece imprescindible conocer el grado de competencia/actuación formal/concreta de nuestros alumnos en este esquema cognitivo, utilizando procedimientos que resulten sencillos y a la vez fiables. En la literatura sobre el tema (Lawson, 1978; Longeot, 1965; Shayer et al., 1979) se recogen diversas pruebas y tests encaminados a tal fin, además de la evaluación del razonamiento cognitivo en otros esquemas operatorios. Sin embargo, el subtest de Longeot se limita al dominio de la proporcionalidad lineal de primer grado, presentando además, probablemente, dificultades relacionadas con la capacidad de comprensión lectora de los alumnos antes que con el razonamiento proporcional/probabilístico que pretende evaluar (Farmer, Farrell, Clark y McDonald, 1982). Otros métodos más completos y fiables como el test de Lawson o las tareas razonadas de ciencias de Shayer y colaboradores, hacen uso de experiencias de laboratorio simultáneas al desarrollo de la prueba que, si bien podrían grabarse en vídeo, complican en alguna medida su realización si se pretende una administración colectiva. Finalmente, en otros casos, la presentación de cuestionarios de elección múltiple cerrados puede llegar a impedir un análisis suficientemente completo de las estrategias y procedimientos seguidos en el proceso de resolución.

Las tareas ALTO-CORTO y ARQUITECTO, con el formato que hemos utilizado, resultan en cambio un instrumento sencillo y económico, adecuado para su administración colectiva en el aula, de corrección no complicada y suficientemente rápida una vez disponible el análisis de respuestas así como la tipología de las mismas. Además, el carácter abierto de ambas pruebas permite conocer no sólo el éxito o el fracaso, sino rastrear también el proceso seguido en su resolución. Se presentan, pues, como una herramienta que puede resultar valiosa para un mejor conocimiento de algunas de las características cognitivas de los estudiantes de Enseñanzas Medias en el razonamiento proporcional, siendo posible quizás extender su rango de aplicación más allá del ámbito de la enseñanza de las ciencias, como por ejemplo, a las Tutorías de los escolares. En este sentido, podría resultar de interés un estudio, que se encuentra pendiente de publicación, en el que se analizan detalladamente las diferencias observadas en la competencia/actuación cognitiva en el razonamiento proporcional de una amplia muestra de alumnos de Enseñanzas Medias, evaluada con las tareas descritas en este trabajo, con relación a diversas variables: sexo, curso, modalidad de estudio (FP/BUP) y calificaciones escolares obtenidas en la asignatura de Física y Química.

En segundo lugar, parece necesario resaltar la importancia que puede tener el análisis de las respuestas a las tareas que se proponen a los alumnos, en el contexto natural del aula, como método de investigación didáctica. Su aplicación supone la búsqueda de las operaciones materiales, perceptivas y cognitivas, entre otras, necesarias para la resolución de los problemas presentados, permitiendo así la identificación de modelos de razonamiento de los estudiantes, lo que, sin duda, puede facilitar al profesorado una mejor comprensión de la organización de las habilidades que se requieren para el uso de ciertas estrategias, tales como la selección y organización de datos relevantes, el recurso a determinadas subtareas, la utilización de algoritmos concretos, etcétera.

Todo ello, finalmente, nos conduce a la necesidad del diseño y la aplicación de metodologías y materiales didácticos que permitan un aprendizaje significativo, capaz de potenciar una enseñanza más conceptual de los procedimientos de resolución de problemas, considerados éstos en una acepción amplia del término, frente a la enseñanza mecánica y supeficial de los mismos, creando, además, condiciones más idóneas para favorecer la adquisición y/o la consolidación del razonamiento formal de nuestros estudiantes. En definitiva, hacer posible que el dualismo desarrollo intelectual/aprendizaje sea una realidad en nuestras aulas, cumpliéndose así una de las funciones más importantes y, en parte específica, para la que debería servir una larga escolarización.

Referencias

Acevedo, J. A.; Bolívar, J. P.; Sánchez-Laulhé, E., y Trujillo, M. (1987a): Razonamiento proporcional lineal de primer grado: la tarea ALTO-CORTO, *Actas de las V Jornadas de Estudio sobre Investigación en la Escuela*, Sevilla: Publicaciones de la Universidad de Sevilla, 84-86.

Acevedo, J. A.; Bolívar, J. P.; Sánchez-Laulhé, E., y Trujillo, M. (1987b): Razonamiento proporcional múltiple: la tarea ARQUITECTO, *Actas de las V Jornadas de Estudio sobre Investigación en la Escuela*, Sevilla: Publicaciones de la Universidad de Sevilla, 80-83.

Aguirre de Cárcer, I. (1981): La enseñanza de las ciencias y la teoría de Piaget (1971-1981). Resultados más importantes para el profesorado de BUP y del primer ciclo universitario, *Boletín del ICE de la Universidad Autónoma de Madrid, 4*, 21-37.

Aguirre de Cárcer, I. (1985): *Los adolescentes y el aprendizaje de las Ciencias*, Madrid: Publicaciones del MEC.

Carretero, M. (1980a): Investigaciones sobre el pensamiento formal, *Revista de Psicología General y Aplicada, 35*(1), 1-28.

Carretero, M. (1980b): Desarrollo intelectual durante la adolescencia: competencia, actuación y diferencias individuales, *Infancia y Aprendizaje, 12*, 81-98.

Carretero, M. (1985): El desarrollo cognitivo en la adolescencia y la juventud: las operaciones formales. En M. Carretero; J. Palacios, y A. Marchesi (comp.): *Psicología Evolutiva 3. Adolescencia, madurez y senectud*, Madrid: Alianza, 37-93.

Corral, A. (1986): La dificultad de enseñar el razonamiento proporcional, *Infancia y Aprendizaje, 35-36*, 47-58.

Corral, A. (1987): El aprendizaje de la estrategia de comparación de proporciones, *Infancia y Aprendizaje, 37*, 33-43.

Farmer, W. A.; Farrell, M. A.; Clark, R. M., y McDonald, J. (1982): A validity study of two paper-pencil tests of concrete and formal operations, *Journal of Research in Science Teaching, 19*, 475-483.

Farrell, M. A., y Farmer, W. A. (1985): Adolescents' performance on a sequence of proportional reasoning tasks, *Journal of Research in Science Teaching, 22*(6), 503-518.

Flavell, J. H., y Wholwill, J. F. (1969): Formal and functional aspects of cognitive development. En D. Elkind y J. H. Flavell (eds.): *Studies in cognitive development: Essays in honour of Jean Piaget*, New York: Oxford University Press.

Gómez Granell, C. (1987): Operaciones matemáticas: relaciones entre concepto y representación gráfica. En A. Álvarez (comp.): *Psicología y Educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica*, Madrid: Visor y Publicaciones del MEC, 313-316.

Hart, K. (1978a): Mistakes in mathematics, *Mathematics Teaching, 85*, 38-40.

Hart, K. (1978b): The understanding of ratio in the secondary school, *Maths in School, 7*(1), 4-6.

Inhelder, B., y Piaget, J. (1955): *De la logique de l'enfant a la logique de l'adolescent. Essais sur la construction des structures opératoires formalles* (París, PUF). Traducción castellana de M. T. Cevasco, 1972: *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*, Buenos Aires: Paidós.

Karplus, R., y Karplus, E. (1972): Intellectual development beyond elementary school III. Ratio: a longitudinal study, *School Science and Mathematics, 72*(8), 735-742.

Karplus, R.; Karplus, E.; Formisano, M., y Paulsen, A. (1977): Proportional reasoning and control of variables in seven countries, *Journal of Research in Science Teaching, 14*(5), 411-417.

Karplus, R.; Lawson, A.; Wollman, W.; Appel, M.; Bernoff, R.; Howe, A.; Rusch, J., y Sullivan, F. (1977): *Science Teaching and the Development of Reasoning*, Berkeley, California: Lawrence Hall of Science.

Karplus, R.; Pulos, S., y Stage, E. K. (1980): Early adolescent's structure of proportional reasoning. En R. Karplus (ed.): *Procedings of the 4th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley, California: Lawrence Hall of Science.

Karplus, R.; Pulos, S., y Stage, E. K. (1983a): Early adolescents proportional reasoning on rate problems, *Educational Studies in Mathematics, 14*, 219-233.

Karplus, R.; Pulos, S., y Stage, E. K. (1983b): Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh, y M. Landau (eds.): *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, New York: Academic, 45-90.

Lawson, A. E. (1978): The development and validation of a classroom test of formal reasoning, *Journal of Research in Science Teaching, 15*(1), 11-24.

Longeot, F. (1965): Analyse statistique de trois tests genetique collectifs, *Bulletin de l'Institute National d'Etude, 20*(4), 219-237.

Noelting, G. (1980a): The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part I. Differentiation of stages, *Educational Studies in Mathematics, 11*(2), 217-253.

Noelting, G. (1980b): The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part II. Problem-structural at successive stages: problem solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring, *Educational Studies in Mathematics, 11*(3), 331-363.

Pérez Echevarría, M. P.; Carretero, M., y Pozo, J. I. (1986): Los adolescentes ante las matemáticas. Proporción y probabilidad, *Cuadernos de Pedagogía, 133*, 9-13.

Pérez Echevarría, M. P. (1987): Relación entre estrategias de cálculo y tipo de problemas en la enseñanza de las matemáticas. En A. Álvarez (comp.): *Psicología y Educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica*, Madrid: Visor y Publicaciones del MEC, 339-344.

Pozo, J. I., y Carretero, M. (1986): Desarrollo cognitivo y aprendizaje escolar, *Cuadernos de Pedagogía, 133*, 15-19.

Pozo, J. I., y Carretero, M. (1987): Del pensamiento formal a las concepciones espontáneas: ¿qué cambia en la enseñanza de la ciencia? *Infancia y Aprendizaje, 38*, 35-52.

Shayer, M.; Wylam, H.; Küchemann, D. E., y Adey, P. (1979): *Science Reasoning Tasks*, Windsor: NFER.

Staver, J. R., y Pascarella, E. T. (1984): The effect of method and format on the responses of subjects to a piagetian reasoning problem, *Journal of Research in Science Teaching, 21*(3), 305-314.

Tourniaire, S., y Pulos, S. (1985): Proportional reasoning: a review of the literature, *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

Vergnaud, G. (1983): Multiplicative structures. En R. Lesh, y M. Landau (eds.): *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, New York: Academic, 127-174.

Vergnaud, G. (1985): Didáctica y adquisición de la noción de volumen, *La enseñanza de la matemática a debate*, Madrid: Publicaciones del MEC, 161-173.