Rev. de Psicol. Gral y Aplic., 1998, *51* (3-4), 533-552

APRENDIZAJE DE LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN. SECUENCIACIÓN DE LOS PROBLEMAS VERBALES SEGÚN SU DIFICULTAD

V. BERMEJO, M.O. LAGO, P. RODRÍGUEZ[1]
Facultad de Psicología
Universidad Complutense de Madrid

Resumen

La enseñanza-aprendizaje de la adición y sustracción se facilita teniendo en cuenta el grado de dificultad de los distintos tipos de problemas. Partiendo de esta idea, la presente investigación pretende jerarquizar los problemas verbales de sumar y restar en función de la dificultad de los mismos. Para ello, tres grupos de niños de 21 de Educación Infantil ($\bar{x}$ = 5.7), de 11 de Educación Primaria ($\bar{x}$ = 6.8) y de 21 de Educación Primaria ($\bar{x}$ = 7.9) han pasado un conjunto de pruebas individuales, tanto verbales como numéricas. Los resultados muestran la existencia de diferencias estadísticamente significativas en el comportamiento de los niños en función de la escolaridad, del tipo de problema y de la ubicación de la incógnita. Sin embargo, no hay diferencias significativas en función del tipo de operación, sea ésta de adición o de sustracción. Así mismo, cada curso tiende a utilizar unas estrategias determinadas y comete igualmente unos errores característicos. Finalmente, presentamos una jerarquización de los distintos problemas verbales, obtenida mediante la aplicación del Escalograma de Guttman.

Abstract

The teaching and learning of addition and subtraction is fostered by taking into account the level of difficulty of the several kinds of problems. Starting from this point, the present research is intended to make a hierarchy of addition and subtraction word problems attending to their difficulty. To this end, three groups of children from 2nd course of Educación Infantil (M: 5 years and 7 months), 1st course of Educación Primaria (M: 6 years and 8 months) and 2nd course of Educación Primaria (M: 7 years and 9 months) went through a set of individual tests, both verbal and numerical. The data show the existence of significant differences in children=s behavior depending on their school level, on the kind of problem and on the place of the unknown. However, there are not significant differences regarding the kind of operation, that is, addition or subtraction. Likewise, each course tends to use specific kinds of strategies and errors. Finally, we present a hierarchy of the different word problems, obtained through the application of Guttman's Scalogram.

1. Introducción

Desde hace más de una década (ver, por ejemplo, 1990, 1993, etc.) venimos resaltando las consecuencias negativas que se desprenden del distanciamiento secular existente entre práctica e investigación psico-educativas, abogando por unas relaciones estrechas y recíprocas entre

[1] Ayuda a la Investigación Educativa, 1995

ambas. Este distanciamiento resulta incluso más notorio en el ámbito de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, debido, al menos, a dos hechos relevantes. Por una parte, a las altas cotas de fracaso escolar alcanzadas en este área. Baste, como botón de muestra, los preocupantes resultados obtenidos en matemáticas en las últimas evaluaciones llevadas a cabo por el Ministerio de Educación (I.N.C.E.) en el primer Ciclo de la ESO y en los dos Cursos de BUP. Y, por otra, es igualmente significativa la abundancia de investigaciones realizadas en este ámbito. Efectivamente, las aportaciones procedentes de la investigación son cada día más significativas y más orientadas a los problemas del aula, de modo que se está alcanzando un cierto consenso en torno a una serie de premisas=pilares para mejorar la educación en este área, como, por ejemplo:

1) El aprendizaje debe ser significativo (ver, por ejemplo, Hiebert y Carpenter, 1992; o van Oers, 1996).

2) La escuela debe potenciar sobre todo las actividades de alto nivel: razonamiento, representación, toma de decisiones, etc., insistiendo menos en: actividades de cálculo, mecánicas, memorísticas, etc. (ver, por ejemplo, el libro: *Theories of mathematical learning,* editado por Steffe y otros, 1996).

3) El aprendizaje escolar debe tener en cuenta los conocimientos informales (ver, por ejemplo, Nunes, 1992).

Sin embargo, un rápido análisis de lo que acontece en la práctica educativa, en general, permite constatar aún la existencia de grandes discrepancias entre las derivaciones psicoeducativas obvias que se siguen de las premisas mencionadas y lo que realmente ocurre en la práctica escolar, tal como se desprende, por ejemplo, del análisis de dos hechos concretos:

1) Por una parte, lo que suele ocurrir en el aula: la enseñanza de las matemáticas suele centrarse principalmente en torno a la realización de actividades memorísticas y de cálculo, siendo los contenidos demasiado formalistas y descontextuados (por ejemplo: los niños pasan horas *rellenando o completando* cuentas o algoritmos).

2) Y en segundo lugar, la programación de los textos: Hemos realizado un análisis de los textos de matemáticas de 11 y 21 de E.P. y hemos encontrado, en general, los mismos defectos antes mencionados: la enseñanza de los procedimientos de cálculo constituye todavía el núcleo central en torno al cual se organiza la programación de los textos. Por ejemplo, la enseñanza de la suma se inicia desde las primeras páginas mediante el algoritmo, y sólo a partir de la página 30, más o menos, se introduce el primer problema verbal.

Esta situación de distanciamiento entre práctica e investigación psico-educativas es manifiestamente negativa para el desarrollo infantil, llegando incluso a crear un cierto talante esquizofrénico en el niño, que vive y hace unas matemáticas fuera de la escuela y otras diferentes en el aula (ver Nunes, 1992).

La presente investigación pretende, en general, superar esta situación esquizofrénica, integrando la matemática informal y formal y dando significado a los contenidos matemáticos escolares. Para ello, proponemos reorganizar el currículo matemático escolar sobre la adición y sustracción, no en torno a los algoritmos como se ha hecho hasta ahora, sino en torno a los problemas verbales, que son situaciones matemáticas con un alto grado de significación, que el niño se plantea frecuentemente en su vida cotidiana extra-escolar. Las investigaciones recientes (Bebout, 1990; Bergeron y Herscovics,1990; Carpenter, Ansell, Franke, Fennema y Weisbeck, 1993; Carpenter, Moser y Bebout, 1988) han resaltado con respecto a estas situaciones matemáticas, entre otros resultados, los siguientes:

1) Antes de recibir instrucción formal, los niños ya suelen resolver múltiples problemas de sumar, restar e incluso de multiplicar y dividir.

2) Estos niños resuelven los problemas verbales mediante el uso del conteo y de objetos, pero no estarían suficientemente preparados para entender de modo significativo los símbolos

del algoritmo. Por tanto, parece razonable que sean los problemas verbales, y no los algoritmos, el modo natural de iniciar la enseñanza de estos contenidos.

Pero además, el National Council of Teachers of Mathematics de Estados Unidos se pronunciaba ya en 1980, e insiste después en 1989, sobre la relevancia de los problemas verbales en la enseñanza de la suma y resta. Igualmente, el consenso es unánime entre los investigadores en cuanto a la prioridad de los problemas verbales con respecto al algoritmo (VJanse, por ejemplo, los trabajos de Carpenter y colaboradores, 1989, 1992, 1996, etc.).

2. Tipología de problemas verbales

Una vez sentada la relevancia de los problemas verbales en la enseñanza de las operaciones de sumar y restar, conviene analizar ahora, con brevedad, las diferentes categorías que se han propuesto.

Las primeras clasificaciones atendían sobre todo a criterios sintácticos, analizando, por ejemplo, el número de palabras existentes en el problema, el orden de los enunciados, el tipo de vocabulario, la complejidad gramatical, etc. (Nesher, 1982). Ahora bien, aunque estos factores tienen su importancia a la hora de explicar la dificultad de los problemas verbales, no obstante, la mayoría de las investigaciones (Carpenter y Moser, 1981, 1982; De Corte, Verschaffel y Pauwels, 1990; Fuson, 1992) muestran que existen otros factores más relevantes, como, por ejemplo, la estructura semántica de los problemas.

Atendiendo a esta estructura semántica, Heller y Greeno (1978) establecen tres tipos de problemas:

1) problemas de cambio.
2) problemas de combinación.
3) y problemas de comparación.

Los primeros describen situaciones dinámicas, mientras que los dos restantes presentan situaciones estáticas. Los problemas de cambio suponen una acción que modifica una cantidad inicial. Por ejemplo:

«Juan tiene 5 canicas y Pedro le da 3 canicas más. Cuántas canicas tiene Juan ahora?».

En los problemas de combinación aparecen dos cantidades disjuntas, que pueden considerarse aisladamente o como partes de un todo. Por ejemplo:

«Juan tiene 5 canicas y Pedro tiene 3 canicas. Cuántas canicas tienen entre los dos?».

Finalmente, los problemas de comparación presentan dos cantidades que se comparan entre sí y una tercera que señala la diferencia entre ellas. Por ejemplo:

«Juan tiene 5 canicas. Pedro tiene 8 canicas. Cuántas canicas tiene Pedro más que Juan?».

En cada una de estas categorías de problemas existen distintos tipos, en función de la ubicación de la incógnita o cantidad desconocida, o si la operación implica incremento o decremento, de modo que Heller y Greeno (1978) llegan a proponer un total de 14 problemas verbales diferentes.

Vergnaud (1982) clasifica los problemas verbales atendiendo a tres criterios principales: medida, transformación y relación estática, proponiendo seis categorías. Por su parte, Carpenter y Moser (1982) clasifican los problemas verbales atendiendo a cuatro dimensiones:

a) carácter dinámico vs estático de la relación entre los conjuntos del problema.
b) Tipo de relación entre un conjunto y sus subconjuntos.
c) Si la acción implica un incremento o un decremento de la cantidad inicial.
d) Naturaleza de la incógnita.

Conjugando estas cuatro dimensiones establecen un total de 17 tipos de problemas verbales. En 1983 estos mismos autores organizan los problemas en las categorías de cambio, comparación, igualación y combinación. En sus últimos trabajos, Carpenter (1993, 1996 manuscrito enviado por el autor), retoma la clasificación del año 1982, identificando cuatro tipos de problemas: unión, separación, parte-parte-todo y comparación.

Tabla 1.- Problemas verbales de adición

Tareas	Incógnita	Ejemplo
Cambio 1	Comienzo	Al principio Enrique tenía algunos coches. Eva le da 6. Ahora Enrique tiene 9. ¿Cuántos tenía al principio?
Cambio 2	Cambio	Santi tiene 5 pegatinas. Su madre le regala algunas. Ahora tiene 8. ¿Cuántas pegatinas le ha regalado su madre?
Cambio 3	Resultado	Juan tenía 4 caramelos. Se ha comprado 11. ¿Cuántos caramelos tiene Juan ahora?.
Combinación 1	Parte	Ana tiene algunas fotos. Su hermana tiene 6. Entre los dos tienen 14. ¿Cuántas fotos tiene Ana?
Combinación 2	Parte	Francisco tiene 7 cuentos. Eduardo tiene algunos cuentos. Entre los dos tienen 12 cuentos. ¿Cuántos tiene Eduardo?
Combinación 3	Conjunto total	Juan tiene 13 canicas. Roberto tiene 2. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?
Comparación 1	Referente	Luis tiene 8 lápices. Tiene 3 más que Carmen. ¿Cuántos tiene Carmen?
Comparación 2	Diferencia	Miguel tiene 13 soldados. Alberto tiene 5. ¿Cuántos soldados tiene Miguel más que Alberto?
Comparación 3	Comparación	Manuel tiene 3 globos. Jaime tiene 12 globos más que Manuel. ¿Cuántos globos tiene Jaime?
Igualación 1	Igualar conjunto desconocido	Marta tiene 13 globos. Si a Pepe le diesen 5 globos tendría los mismos que Marta. ¿Cuántos globos tiene Pepe?
Igualación 2	Igualación desconocida	Hay 4 niñas y 6 niños en un equipo de baloncesto. ¿Cuántas niñas deberían añadirse al equipo para tener el mismo número de niñas que de niños?
Igualación 3	Igualar conjunto conocido	Eva tiene 11 coches. Si le regalasen 3 tendría los mismos que Miguel. ¿Cuántos coches tiene Miguel?
Relacional 1	Comparación inicial desconocida	Al principio Ester tenía algunos cromos más que su amiga. Ester encuentra 3 cromos. Ahora Ester tiene 9 cromos más que su amiga. ¿Cuántos cromos tenía al principio Ester más que su amiga?
Relacional 2	Cambio desconocido	Camilo tiene 5 reglas más que Rodrigo. Camilo se compra algunas más. Ahora Camilo tiene 13 reglas más que Rodrigo. ¿Cuántas reglas se ha comprado Camilo?
Relacional 3	Comparación final desconocida	Al principio Salomé tenía 10 lápices más que Jaime. Salomé se ha comprado 4 lápices. ¿Cuántos lápices tiene ahora Salomé más que Jaime?

Por último, Fuson (1992) clasifica los problemas verbales de adición y sustracción basándose en dos aspectos: si implican una operación unaria o binaria y si el problema presenta una estructura estática o dinámica.

Cerramos este apartado presentando una nueva tipología, que si bien no se distancia demasiado de las clasificaciones anteriormente recogidas, aporta, no obstante, algunas matizaciones y resulta más completa, tal como puede observarse en la tabla 1, que recoge sólo los problemas verbales de adición.

3. Procedimientos de resolución de los problemas verbales

Los niños utilizan distintos tipos de procedimientos para resolver los problemas verbales de suma y resta, siendo algunos correctos y otros erróneos. En cuanto a los primeros, Carpenter y Moser (1984) identifican las siguientes categorías de estrategias o procedimientos:

1) Modelado directo.

2) Período de transición durante el cual los niños aplican el modelado directo y algunas estrategias de conteo.

3) Estrategias de conteo.

4) Finalmente, los niños emplean estrategias memorísticas y derivadas, conocidas como hechos numéricos.

Recientemente, en un estudio minucioso y bien elaborado, Carpenter (1996) llega a relacionar el tipo de estrategia con el tipo de problema verbal, el tipo de operación y el lugar de la incógnita. Efectivamente, dentro de la categoría del modelado directo, que se caracteriza por usar objetos para representar los sumandos, o términos de la sustracción, antes de operar, los niños solucionan los problemas de cambio y parte-parte-todo con la incógnita en el resultado, mediante la estrategia de *«juntar todo»*, consistente en representar cada uno de los sumandos con los dedos u objetos, contando seguidamente ambos conjuntos. Sin embargo, en los problemas de cambio, en los que se desconoce el conjunto de cambio, los niños prefieren la estrategia de *«juntar a»*, en la que el niño construye un conjunto equivalente al inicial y añade objetos hasta que alcanza el conjunto total, siendo la respuesta el número de elementos añadidos. Similarmente, en los problemas de cambio de sustracción también existen variaciones dependiendo de que la incógnita se encuentre en el resultado o en el conjunto de cambio. En el primer caso, la estrategia que suele utilizarse se denomina *«quitar de»*, consistente en construir el conjunto total, retirar los elementos correspondientes al conjunto de cambio y después contar los que quedan. En caso de que el conjunto desconocido sea el de cambio, la estrategia empleada por los niños se denomina *«quitar a»*, de modo que partiendo del conjunto mayor se van quitando objetos hasta obtener el conjunto menor, siendo la respuesta el número de objetos sustraídos.

En los problemas de comparación en los que se desconoce la diferencia, la estrategia preferentemente utilizada consiste en el *«emparejamiento»*, de modo que los niños construyen dos conjuntos de fichas que representan los dos conjuntos, en correspondencia uno a uno, obteniendo la respuesta al contar las fichas desparejadas.

En la categoría estrategias de conteo, el niño no precisa la representación física de los dos conjuntos. En los problemas de adición generalmente aparecen dos tipos de estrategias: *«contar a partir del primer sumando»* y *«contar a partir del sumando mayor»*. En el primer caso, el niño comienza la secuencia de conteo a partir del primer conjunto, añadiendo a continuación el segundo, de modo que la respuesta consiste en el último numeral empleado. En el segundo caso, el procedimiento es similar, pero ahora el conteo comienza a partir del sumando mayor.

En los problemas de cambio o combinación con la incógnita en el segundo sumando, los niños recurren a la estrategia de *«contar hasta»*, consistente en contar desde el sumando conocido hasta el resultado. Por ejemplo, en el problema de cambio:

«Juan tiene 5 caramelos y Pedro le da algunos más. Ahora Juan tiene 9 caramelos. Cuántos caramelos le ha dado Pedro?»

Cuando el niño recurre a esta estrategia cuenta desde 5 hasta 9, siendo la respuesta el número de dedos que ha extendido mientras contaba de una cantidad a otra.

En los problemas de sustracción, se diferencian claramente dos estrategias: *«contar hacia atrás»* y *«contar hacia atrás hasta»*. La primera es parecida a la estrategia de «quitar de», que veíamos en el modelado directo. Por ejemplo, ante el siguiente problema de cambio:

«Juan tiene 12 canicas y pierde 4 canicas. Cuántas canicas le quedan?»,

Una niña de 11 de E.P. contaba «12, 11, 10 (pausa) 9. Le quedan 9». En este caso, la niña, partiendo del minuendo, cuenta hacia atrás tantos numerales como figuran en el sustraendo, levantando simultáneamente un dedo, de modo que detiene el conteo cuando hay tantos dedos levantados como indica el sustraendo, siendo la respuesta el último numeral empleado. Esta última estrategia supone un desarrollo evolutivo superior en el niño, ya que no solo requiere la habilidad de contar hacia atrás, sino que además no necesita representar ninguno de los términos de la operación.

Si la incógnita se sitúa en el segundo sumando entonces emplean la estrategia de *«contar hacia atrás hasta»*, es decir, cuentan hacia atrás desde el sumando mayor hasta alcanzar el sumando menor. Por ejemplo, en el problema:

«Juan tiene 12 canicas y le da algunas a Pedro. Ahora Juan tiene 8 canicas. Cuántas canicas le ha dado a Pedro?».

Un niño de 21 de E.P. cuenta «12 (extiende un dedo), 11 (extiende otro dedo), 10 (extiende otro dedo), 9 (extiende otro dedo), 8», mira los dedos que ha extendido y responde «cuatro».

Las estrategias de hechos numéricos se refieren a ciertas combinaciones numéricas que bien los niños conocen de memoria o bien las pueden derivar a partir de otras que ya conocen. En este último caso se habla de *«reglas»*. Por ejemplo, en relación con las primeras, los niños aprenden rápidamente ciertas combinaciones numéricas, como, por ejemplo, las de los números dobles (4 y 4, 5 y 5, etc.). En el caso de que el niño aplique «reglas», ante la tarea de sumar 9 + 8, haría lo siguiente: «como sJ que 8 y 8 son 16, una más = 17».

En resumen, los niños pequeños prefieren estrategias que suponen la representación física de las acciones o relaciones descritas en el problema, utilizando principalmente los procedimiento de modelado directo. Más tarde, los niños adquieren una mayor flexibilidad a la hora de seleccionar los procedimientos de resolución, eligiendo las estrategias en función del problema planteado o de la situación concreta que se le presenta. Incluso podrían aparecer comportamientos regresivos consistentes en usar estrategias menos desarrolladas, a pesar de conocer otras más sofisticadas (Bermejo y Rodríguez, 1990a; Bermejo, Lago y Rodríguez, 1994).

En cuanto a los procedimientos incorrectos empleados en la resolución de problemas verbales, los niños suelen cometer dos tipos de errores principales:

1) repetición de una de las cantidades propuestas en el problema,

2) selección de una operación inadecuada.

El primero de ellos aparece con cierta frecuencia en las cuatro categorías de problemas (Bermejo y Rodríguez, 1988, 1990a y b; Carpenter y Moser, 1981, 1983; Cummins, 1991; De Corte y Verschaffel, 1985, 1987). Así, en los problemas de cambio, este tipo de error surge porque los escolares no son capaces de representar distintamente los conjuntos de partida y de cambio. Por ejemplo, cuando se inicia el problema por la proposición «María tiene algunos lápices», el niño no crea el conjunto de partida para María, sino que, ante la segunda proposición «Isabel le da 5», forma entonces un conjunto de cinco lápices. Ahora bien, al no haber creado el conjunto de partida, este conjunto formado por cinco lápices es concebido, no como un conjunto de cambio, sino como el conjunto de partida. Igualmente, en los problemas de combinación, los niños entienden la frase «Pedro y Ana tienen 9 manzanas», como si cada uno tuviese 9 manzanas. Finalmente, en los problemas de comparación, este tipo de error se debe a que los niños interpretan una proposición de relación («Mario tiene 9 globos más que Javier») como si fuera una proposición de asignación («Mario tiene 9 globos»).

La selección de una operación inadecuada se produce habitualmente cuando la incógnita se sitúa en uno de los sumandos, o en el conjunto de referencia o diferencia en el caso de los problemas de comparación, consistiendo la solución propuesta por los niños en la aplicación de la forma canónica a + b = ? Es decir, ante el tipo de operación a + ? = c, los escolares lo interpretan como si fuera a + c = ? Este tipo de error también suele aparecer en las cuatro categorías de problemas, y se debe, bien a la dificultad para concebir el significado de la indefinición de uno de los sumandos («algunos»), bien a que no aprecian la información temporal contenida en el texto, bien a un procesamiento superficial del texto, bien finalmente a la incomprensión del problema. En todos los casos los escolares optan simplemente por la operación aritmética que les resulta más conocida: la forma canónica.

4. Niveles de dificultad de los problemas verbales

La dificultad de los problemas verbales depende principalmente de los siguientes factores: estructura semántica, ubicación de la incógnita, tamaño de las cantidades propuestas y presencia o no de ayudas.

En cuanto a la estructura semántica, la mayoría de los trabajos (p.e., Bermejo y Rodríguez, 1987, 1990a y b; Carpenter y Moser, 1882, 1983, 1984; De Corte y Verschaffel, 1987) indican que los problemas más sencillos son, en general, los de cambio, seguidos de los problemas de combinación, después los de igualación y, finalmente, los problemas de comparación serían los más complejos. En efecto, diversos estudios (p.e. Bermejo y Rodríguez, 1990b; Bermejo, Lago y Rodríguez, 1994; Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer, 1988; De Corte y Verschaffel, 1987; De Corte, Verschaffel y Pawels, 1990; Verschaffel, De Corte y Pauwels, 1992) han mostrado que los problemas verbales, que contienen sentencias relacionales en las que un conjunto se define en función de otro, son los más difíciles, incrementándose esta dificultad cuando la operación aritmética resulta inconsistente con la sentencia de relación (p.e., Lewis y Mayer, 1987; Lewis, 1989). Dada esta mayor dificultad de los problemas de comparación, los autores han centrado su estudio especialmente en torno a ellos, siguiendo distintas líneas de trabajo: bien la reformulación de estos problemas (p.e.De Corte, Verschaffel y De Win, 1985), bien el entrenamiento de las habilidades de representación (p.e. Willis y Fuson, 1988; Lewis, 1989), bien el registro del movimiento de los ojos (De Corte, Verschaffel y Pauwels, 1990, Verschaffel, De Corte y Pauwels, 1992). Por nuestra parte (1994), hemos evaluado la habilidad de los escolares de edades comprendidas entre 6-8 años para resolver tareas comparativas, encontrando que no todas las situaciones de comparación entrañan el mismo nivel de dificultad. Efectivamente, los datos procedentes del escalograma de Guttman ponen de manifiesto una progresiva capacidad de los niños para comprender relaciones comparativas, apareciendo el siguiente orden de fácil a difícil: resolución de problemas de comparación de magnitudes abstractas («dime un número que sea mayor que 5 y menor que 9»), resolución de problemas de comparación de magnitudes concretas («haz una hilera que sea mayor que la de abajo y menor que la de arriba»), resolución de problemas verbales de comparación («Luis tiene 6 canicas. Juan tiene 2 canicas más que Luis. ¿Cuántas canicas tiene Juan?»), y, finalmente, resolución de problemas verbales de comparación de magnitudes («Juan tiene 6 caramelos en su bolsa y Pedro tiene 3 en la suya. ¿Cuántos caramelos tiene Luis si sabemos que tiene 2 más que Pedro y 1 menos que Juan?»).

Con respecto al lugar ocupado por la incógnita, la dificultad sería máxima cuando la cantidad desconocida se sitúa en el primer sumando o conjunto de partida (Carpenter, 1986; Hiebert, 1982), mientras que esta dificultad sería mínima si se ubica la incógnita en el último término o resultado. Igualmente, algunos autores (Bermejo y Lago, 1988; Carpenter y Moser, 1982) han encontrado que la presencia de objetos concretos o dibujos facilita el proceso de representación, dando lugar a una mejora del éxito infantil, especialmente en los primeros niveles de escolaridad. Finalmente, la dificultad se incrementa lógicamente a medida que aumenta la magnitud de los sumandos.

Las investigaciones llevadas a cabo con muestras pertenecientes a Educación Infantil apuntan que estos niños suelen resolver con éxito los problemas de cambio y combinación cuando la incógnita se sitúa en el resultado (Bebout, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter, Hiebert y Moser, 1983; De Corte y Verschaffel, 1987). Sin embargo, investigaciones más recientes (ver Carpenter et al., 1993) encuentran que los niños de Educación Infantil, que aún no han recibido instrucción formal en la adición y sustracción, resuelven con éxito incluso problemas de sustracción con el resultado desconocido, problemas de comparación y, lo que es aún más llamativo, problemas de cambio con la incógnita en el conjunto de cambio, esto es, en el segundo sumando. Ahora bien, hay que señalar que en este trabajo los niños disponían de objetos para representar las acciones descritas en el problema. Igualmente, en el trabajo de Bermejo y Rodríguez (1987) el 52% de niños de 5-5;6 años y el 64% de niños de 5; 6-6 años resuelven correctamente los problemas de igualación cuando contaban con objetos para representar los conjuntos del problema. Hudson (1983), por su parte, propone que los niños de esta etapa son capaces de resolver con éxito los problemas de comparación cuando se procede a la reformulación de los mismos.

En Educación Primaria se aprecia un aumento notable en el rango de problemas que los escolares son capaces de solucionar. Efectivamente, en relación con los problemas de cambio, los niños de 11 manifiestan un alto nivel de éxito en los problemas de añadir y quitar con la incógnita en el resultado; no obstante, esta cota desciende cuando la incógnita se ubica en uno de los términos (Bebout, 1990; Bermejo y Rodríguez,1990b; Carpenter et al, 1981; 1983; De Corte y Verschaffel, 1987; Stern, 1993).

En los problemas verbales de combinación, aproximadamente el 40% de los niños de 11 resuelven correctamente estas tareas cuando la incógnita se sitúa en uno de los subconjuntos (p.e. Carpenter et al, 1981; Steffe y Johnson, 1971), pero este porcentaje se incrementa considerablemente tras un período de instrucción, llegando a alcanzar el 80% de las respuestas correctas (Bebout, 1990; Carpenter et al, 1983; De Corte y Verschaffel, 1987). Igualmente De Corte et al. (1985) encuentran mejoras sustanciales en este tipo de problemas en niños de 6 a 8 años cuando se procede a la reformulación de los mismos. Por nuestra parte, hemos comprobado que los escolares de 11 obtienen un porcentaje de aciertos en torno al 90% en los problemas de combinación con la incógnita en el resultado y con la presencia de ayudas (Bermejo y Rodríguez, 1987).

Por lo que se refiere a los problemas de comparación, sólo el 18.33% de los niños de 21 de E.P. resuelven con éxito estos problemas cuando la incógnita se sitúa en el conjunto referente, mientras que cuando se sitúa en el conjunto de comparación lo hacen bien el 60% (Bermejo y Rodríguez, 1990b). No obstante, De Corte et al. (1985) encuentran, como en los problemas de combinación, que la reformulación de los problemas de comparación en los que se desconoce la diferencia, mejora sensiblemente los resultados. Por ejemplo, cuando el problema de comparación:

«Luis tiene 6 bombones. Ana tiene 5 bombones. ¿Cuántos bombones tiene Luis más que Ana?»

Se reformula del siguiente modo:

«Hay 6 coches, pero sólo 5 conductores. ¿Cuántos coches no tendrán conductor?»

El éxito de los niños se incrementa manifiestamente.

Finalmente, a pesar de la escasez de datos con respecto a los problemas de igualación, en una de nuestras investigaciones que ya comentamos anteriormente (Bermejo y Rodríguez, 1987), los niños de 11 tuvieron éxito en el 76% de los ensayos.

Estos cambios con la edad en la resolución de problemas verbales de adición y sustracción que hemos reseñado con brevedad, han sido explicados de dos modos distintos principalmente. Por una parte, algunos autores (Briars y Larkin, 1988; Riley, Greeno y Heller, 1983; Riley y Greeno, 1988) han propuesto explicaciones lógico-matemáticas del fracaso infantil en matemáticas, atribuyendo los errores a carencia de conocimiento conceptual o al desconocimiento del conjunto de relaciones lógicas. En cambio, otros autores (Cummins, 1991; Davis-Dorsey, Ross y Morrison, 1991; De Corte, Verschaffel y De Win, 1987) prefieren explicaciones fundadas en aspectos lingüísticos, sugiriendo que la utilización de procedimientos destinados a reformular los problemas y/o personalizarlos resultan útiles para mejorar la ejecución en los problemas verbales de adición y sustracción.

Sin embargo, aunque hemos señalado diferencias de dificultad de los problemas verbales globalmente, no resulta sencillo establecer una jerarquización precisa de estos problemas verbales de adición y sustracción en función de su dificultad, debido fundamentalmente a la incidencia de diversos factores y a sus complejas interacciones, que producen en no pocos casos solapamientos entre las distintas categorías.

5. Planteamiento de objetivos

La mejora de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas requiere la implementación de programas psico-instruccionales que, al menos, afecten e integren al profesor, al alumno y a los contenidos curriculares. En esta investigación nos centramos principalmente en torno a estos últimos, y más concretamente, en torno a la adición y sustracción[2].

Partimos de la idea de que los contenidos curriculares han de secuenciarse no tanto en función de la estructura matemática de los mismos, cuanto en función del desarrollo infantil (Cobb, Wood, Yackel, Nicholls, Wheatley, Trigatti y Perlwitz, 1991). Por ello, el objetivo principal de esta investigación consiste en jerarquizar los distintos tipos de problemas verbales de sumar y restar según la dificultad de los mismos. Más en concreto, se pretende:

a) analizar el efecto de las variables:
- tipo de problema,
- tipo de operación,
- ubicación de la incógnita y
- nivel escolar.

b) Delimitar con precisión y detalle la línea evolutiva que siguen los niños en el aprendizaje de los conceptos matemáticos de adición y sustracción.

6. Método empírico

6.1. Participantes

En esta investigación participaron 72 niños elegidos al azar y distribuidos en tres grupos de edad. El primero de ellos estaba integrado por niños de Educación Infantil con edades comprendidas entre los 5-6 años ($\bar{x}$ = 5.7). El segundo grupo lo constituían niños de primer curso de Educación Primaria, cuyas edades oscilaban entre los 6-7 años ($\bar{x}$ = 6.8), y, por último, el tercero lo formaban niños de segundo de E.P. con edades comprendidas entre 7-8 años ($\bar{x}$ = 7.9). Todos los participantes procedían de colegios públicos de clase socio-cultural media-alta.

[2] La investigación que presentamos aquí forma parte de un estudio empírico más amplio, cuya fase II constituye un programa instruccional que se centra en torno al profesor y los alumnos.

6.2. Material y procedimiento empírico

El material utilizado consistía en una serie de tarjetas de cartulina en las que aparecían escritas las tareas, así como papel, lápiz y una cámara de vídeo.

Las pruebas fueron individuales, se realizaron durante las horas lectivas de los centros y se registraron en vídeo todas las sesiones, lo que supondrá decenas de cintas de vídeo y un tiempo considerable para visualizarlas. Las tareas se presentaron en cuatro sesiones experimentales, con una duración media de 20 minutos cada una. Para controlar los posibles efectos derivados de la capacidad lectora de los sujetos, todas las pruebas eran leídas en voz alta por el experimentador. Igualmente, las sesiones se espaciaron una semana para controlar el efecto posible de aprendizaje.

Cada niño pasó un total de 33 tareas, tal como puede observarse en la tabla 1 para los problemas aditivos, con dos ensayos cada una. El orden de presentación de las tareas se hizo al azar, aunque procurando que en cada sesión se recogiese un número representativo de cada problema. Todos los niños pasaron las pruebas en el mismo orden.

Finalmente, la respuesta de los niños era considerada correcta cuando resolvían bien la tarea y justificaban adecuadamente su respuesta.

7. Análisis y discusión de resultados

Para facilitar el análisis de nuestros datos, dividiremos el estudio de los mismos en dos partes:

a) análisis de las respuestas correctas y

b) análisis de los procedimientos de resolución, es decir, de las estrategias y errores.

7.1. Análisis de las respuestas correctas

Para determinar cuantitativamente el efecto de los distintos factores del diseño experimental (Grupo, Tarea, Incógnita y Operación), llevamos a cabo un ANOVA mediante el programa BMDP-2v, encontrando que son significativos los efectos principales de los factores:

GRUPO ($F_{2,69}$ = 41.35, p á 0.01).

TAREA ($F_{4,276}$ = 128.34, p á 0.01).

INCÓGNITA ($F_{2,138}$ = 3.60, p á 0.05).

Pero no lo es el factor OPERACIÓN. Ello significa que el comportamiento de los niños en general difiere significativamente según el grupo de sujetos, según el tipo de tarea y según la ubicación de la incógnita. En cambio, es interesante resaltar que el factor Operación (suma o resta) no es significativo, de modo que una vez más insistimos en el desacierto de los libros de textos al posponer la enseñanza de la sustracción con respecto a la de la adición.

Las comparaciones múltiples, realizadas con la prueba de Tuckey en el factor grupo, no revelan diferencias significativas entre los grupos comparados dos a dos. No obstante, en la Tabla 2 puede observarse que la media de respuestas correctas se incrementa con el nivel escolar de los niños. Asimismo, los contrastes entre las distintas ubicaciones de la incógnita, llevados a cabo con la prueba de Tuckey, tampoco son significativos. En general, nuestros datos muestran que el nivel de dificultad es máximo cuando se desconoce el primer término, y es mínimo cuando el término desconocido es el tercero o resultado (ver también, p.e., Bermejo y Rodríguez, 1990b; Carpenter, 1986; Hiebert, 1982). Finalmente, aplicamos la prueba de Tuckey al factor Problema, comparándolos dos a dos. Los resultados muestran la existencia de diferencias significativas únicamente entre los siguientes tipos de tareas: Cambio-Relacional (p á 0.01), Comparación-expresión numérica (p á 0.05) y Relacional-Expresión numérica (p á 0.01).

Tabla 2.- Puntuaciones medias en las tareas de adición (Xad) y sustracción (Xsu).

		G-I		G-II		G-III	
		Xad	Xsu	Xad	Xsu	Xad	Xsu
P1	1	0.08	0.29	0.58	0.83	1.08	1.37
	2	0.29	0.29	0.83	1.04	1.42	1.66
	3	0.62	0.54	1.08	1.00	1.96	1.46
P2	1	0.08		0.67		1.17	
	2	0.12		0.33		0.79	
	3	0.96		1.50		1.92	
P3	1	0.08	0.17	0.42	0.20	0.83	0.87
	2	0.08	0.42	0.42	0.50	0.96	0.95
	3	0.08	0.42	0.21	0.08	0.75	0.70
P4	1	0.21	0.29	0.42	0.29	0.42	0.67
	2	0.37	0.21	1.00	0.71	1.58	1.17
	3	0.25	0.08	0.75	0.25	1.17	0.79
P5	1	0	0.04	0.16	0	0.25	0.37
	2	0	0	0.08	0.12	0.04	0.21
	3	0.12	0.42	0	0	0.25	0.12
P6	1	0.12	0.29	1.08	0.67	1.62	1.17
	2	0.33	0.25	1.08	0.92	1.87	1.46
	3	0.83	0.33	1.50	1.29	2.00	1.83

La puntuación máxima es 2.

Lugar de la incógnita: 1: Incógnita en el primer término; 2: Incógnita en el segundo término; 3: Incógnita en el tercer término.

Tarea: P1: Cambio; P2: Combinación; P3: Comparación; P4: Igualación; P5: Relacionales; P6: Expresión numérica.

Por otra parte, el análisis de las puntuaciones medias (recogidas entre paréntesis) muestra que la dificultad de las tareas, globalmente, se incrementa en este orden:

Algoritmo (1.037)
Cambio (0.914)
Combinación (0.836)
Igualación (0.590)
Comparación (0.412)
Relacional (0.129)

Según estos datos, las tareas numéricas resultan en general más sencillas que las verbales y los problemas verbales de cambio son más sencillos que los problemas verbales de igualación y de comparación, tal como se ha encontrado en otras investigaciones (p.e., Bermejo y Rodríguez, 1990a; Briars y Larkin, 1984; Carpenter, Moser y Bebout, 1988). Conviene resaltar, no obstante, que para los niños de Educación Infantil los problemas verbales de combinación con la incógnita en el resultado son más sencillos que las tareas numéricas.

Tabla 3.- Medias y sumatorios correspondientes a la interacción: Problema (P1: Cambio; P2: Comparación; P3: Igualación; P4: Relacional; P5: Expresión numérica) X Incógnita (I1: Primer término; I2: Segundo término; I3: Tercer término) X Operación (O1: Adición; O2: Sustracción)

	OP.1 sumatorio	OP.1 media	OP.2 sumatorio	OP.2 media
PI-I1	42	0.58	60	0.83
P1-I2	61	0.85	72	1
P1-I3	88	1.22	72	1
P2-I1	32	0.49	30	0.5
P2-I2	35	0.35	36	0.28
P2-I3	25	0.44	20	0.42
P3-I1	25	0.99	30	0.69
P3-I2	71	0.72	50	0.37
P3-I3	52	0.35	27	0.42
P4-I1	10	0.14	10	0.14
P4-I2	3	0.04	8	0.11
P4-I3	9	0.12	4	0.05
P5-I1	68	0.94	51	0.71
P5-I2	79	1.09	63	0.87
P5-I3	104	1.44	80	1.15

El análisis de varianza también revela que son significativas las interacciones dobles: Grupo x Problema (F2,276=14.92, pá.01), Incógnita x Problema (F8, 552=9.56, pá.01), Incógnita x Operación (F2, 276= 6.98, pá.05), así como las interacciones triples: Problema x Incógnita x Grupo (F16, 552=1.95, pá.05) y Problema x Incógnita x Operación (F8, 552=13.72, pá.01). Profundizaremos en estos datos, analizando los efectos simples en las interacciones triples.

Tabla 4.- Medias y sumatorios correspondientes a la interacción: Grupo (GI: Grupo I; GII: Grupo II; GIII: Grupo III) x Problema (P1: Cambio; P2: Comparación; P3: Igualación; P4: Relacional; P5: Expresión numérica) x Incógnita (I1: Primer término; I2: Segundo término; I3: Tercer término)

	G I sumatorio	G I media	G II sumatorio	G II media	G III sumatorio	G III media
P1-I1	9	0.18	34	0.7	59	1.22
P1-I2	14	0.29	45	0.83	74	1.54
P1-I3	28	0.58	50	1.06	82	1.71
P2-I1	6	0.12	15	0.31	41	0.85
P2-I2	3	0.06	22	0.46	46	0.96
P2-I3	3	0.06	7	0.14	35	0.72
P3-I1	12	0.25	17	0.35	26	0.54
P3-I2	14	0.29	41	0.85	66	1.37
P3-I3	8	0.16	24	0.5	47	0.98
P4-I1	1	0.21	4	0.08	15	0.31
P4-I2	0	0	5	0.47	6	0.12
P4-I3	4	0.27	0	0	9	0.18
P5-I1	10	0.2	42	0.87	67	1.39
P5-I2	14	0.29	48	1	80	1.66
P5-I3	28	0.58	67	1.39	89	1.91

En la interacción Problema x Operación x Incógnita son significativos los contrastes tipo de problema y lugar de la incógnita, tanto en la adición como en la sustracción ($F_{8,552}$ = 31.857, pá0.01 y $F_{8,552}$ = 12.756, pá0.01). La resolución correcta de un problema, sea éste de adición o de sustracción, depende más del tipo de problema y del lugar de la incógnita que de la operación, que finalmente se ha de ejecutar para obtener el resultado. Ello aparece más claro aún si tenemos en cuenta, como hemos visto en el análisis de los efectos principales, que el factor Operación no resulta significativo. Los problemas aditivos de comparación son más complejos cuando la entidad desconocida se haya en el conjunto de comparación, mientras que resultan más sencillos cuando se desconoce el referente. Sin embargo, globalmente, los más sencillos son los problemas que llevan la incógnita en la diferencia. Estos resultados se deben a que en el primer caso la proposición de comparación aparece ligada a uno de los actantes, de modo que los niños la interpretan como una proposición de asignación («Juan tiene 7 lápices más que Rubén», lo interpretan como «Juan tiene 7 Lápices»), mientras que, cuando se desconoce la diferencia, la proposición de comparación aparece en la pregunta después de haber asignado las cantidades a los actantes («¿cuántas tiene Joaquín más que Miriam?»). Los problemas de igualación son más sencillos cuando se desconoce la cantidad que iguala los conjuntos. Finalmente, los problemas relacionales resultan más sencillos cuando la comparación final es desconocida (ver tabla 3).

En cuanto a la interacción Grupo x Problema x Incógnita, el análisis de los efectos simples revela que los contrastes tipo de problema y lugar de la incógnita son significativos en los tres niveles de edad ($F_{8,552}$=4.7654, $F_{8,552}$=10.681, $F_{8,552}$=15.586). En consecuencia, en cada uno de los niveles de escolaridad el rendimiento de los niños se encuentra mediatizado por el lugar de la incógnita y el tipo de problema. Además, el análisis de la tabla 4 muestra dos datos especialmente interesantes. Por un lado, en todos los grupos de edad se confirma el orden de dificultad de los problemas al que hicimos mención cuando analizamos el factor tipo de problema. Efectivamente, los algoritmos y los problemas de cambio son los más sencillos, seguidos de los problemas de igualación y comparación, mientras que los relacionales son los más complejos. Por otro, se puede observar que las puntuaciones no llegan a equipararse con la edad en las diferentes tareas, reproduciéndose el orden antes mencionado. Además, dentro de un mismo tipo de problema las diferencias continúan siendo notables, incluso en las expresiones numéricas y en los problemas de cambio.

El Escalograma de Guttman permite obtener una secuenciación más precisa de las tareas en función de la dificultad de las mismas. De este análisis se desprende que el conjunto de problemas verbales forman una «cuasi-escala», al cumplir el criterio de *escalabilidad* (CE = 0.83 > 0.60), pero no el de *reproductibilidad* (CR = 0.856 á 0.90) (Meliá, 1991); de modo que podríamos afirmar, con ciertas reservas, que el orden de aprendizaje de las tareas sería el siguiente:

1. COMBINACION CON CONJUNTO TOTAL DESCONOCIDO
2. CAMBIO CON RESULTADO DESCONOCIDO
3. IGUALACION EN EL CONJUNTO DESCONOCIDO
4. CAMBIO DESCONOCIDO
5. IGUALACION EN EL CONJUNTO CONOCIDO
6. COMBINACION CON PARTE INICIAL DESCONOCIDA
7. CAMBIO CON COMIENZO DESCONOCIDO
8. COMPARACION CON REFERENTE DESCONOCIDO
9. COMPARACION CON DIFERENCIA DESCONOCIDA
10. IGUALACION CON CANTIDAD COMPARADA DESCONOCIDA
11. COMBINACION CON PARTE DESCONOCIDA EN EL SEGUNDO SUMANDO
12. COMPARACION CON CONJUNTO DE COMPARACION DESCONOCIDO
13. TRANSFORMACION DE RELAC. CON SUMANDO INICIAL DESCONOCIDO
14. TRANSFORMACION DE RELAC. CON RESULTADO DESCONOCIDO
15. TRANSFORMACION DE RELAC. CON SEGUNDO SUMANDO DESCONOCIDO

A la hora de explicar esta secuenciación de aprendizaje, hay que tener en cuenta varias consideraciones. En primer lugar, nuestros datos confirman los procedentes del ANOVA, ya que el comportamiento de los niños en las diferentes tareas se encuentra mediatizado por el lugar de la incógnita y la estructura semántica del problema. Por ejemplo, el problema de cambio con el conjunto de cambio desconocido resulta más sencillo que el problema de comparación en el que se desconoce el conjunto de comparación, lo que concuerda con los datos encontrados en otras investigaciones (p.e., Bermejo y Rodríguez, 1990a y b; Carpenter y Moser, 1984; De Corte y Verschaffel, 1987). En segundo lugar, el hecho de que un problema implique acción no garantiza, en todos los casos, un nivel de rendimiento superior en los niños, como parece desprenderse de algunas investigaciones (p.e. Carpenter y Moser, 1982, 1983). Por ejemplo, los problemas de combinación con la incógnita en el resultado son más sencillos que los de cambio con la incógnita también en el resultado. Finalmente, la resolución correcta de un tipo de problema no garantiza la misma ejecución en otros, ni siquiera en aquellos que tienen una estructura semántica similar. Por ejemplo, mientras que el problema de combinación con la incógnita en el resultado es el más sencillo, este mismo problema con la incógnita en el segundo sumando ocupa el onceavo lugar.

7.2. Procedimientos de resolución

En este apartado analizaremos con brevedad en primer lugar las estrategias correctas, para examinar después los tipos de errores cometidos por los niños.

7.2.1. Análisis de las estrategias correctas

En la tabla 5 se recogen minuciosamente las estrategias que los distintos grupos de niños (niveles escolares) utilizan en la resolución de cada una de las tareas planteadas referente a las tareas de restar.

Tabla 5.- Estrategias en las tareas de sustracción. Lugar de la incógnita: 4: primer término; 5: segundo término; 6: resultado

		Cambio			Comparación			Igualación			Relacional			Expresiones		
		4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6
MODELADO DIRECTO																
-quitar de	GI	---	12.5	33.3	---	---	---	---	33.3	100	---	---	---	---	33.3	77.7
	GII	5	16.7	55.5	25	---	---	[illegible]	18.2	14.3	---	---	---	14.3	26.1	53.3
	GIII	---	10.4	8.5	8.3	9.5	---	---	5.2	---	---	---	---	---	9.1	---
-contar todo	GI	28.5	---	16.6	---	---	75	---	---	---	100	100	---	28.5	---	---
	GII	5	---	---	---	---	33.3	---	9.1	71.4	---	---	---	---	---	---
	GIII	6.2	---	---	---	---	---	---	---	33.3	---	---	---	---	---	---
-quitar a	GI	---	37.5	---	---	---	25	---	55.5	---	---	---	---	---	16.6	---
	GII	5	20.8	5.5	---	10	---	---	27.2	---	---	---	---	---	21.7	---
	GIII	---	---	---	---	---	---	---	---	33.3	---	---	---	---	9.1	---
CONTEO																
-contar a partir de un sumando	GI	28.5	---	25	100	---	---	100	---	---	---	---	---	28.5	---	---
	GII	40	---	---	---	---	---	[illegible]	---	---	---	---	---	7.1	---	---
	GIII	46.8	10.4	---	22.2	---	---	[illegible]	---	---	16.6	---	---	7.4	4.6	25
-contar hacia atrás	GI	---	12.5	25	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
	GII	---	4.1	16.7	---	---	---	---	9.1	---	---	---	---	---	13.1	6.6
	GIII	---	18.7	28.5	38.9	9.5	---	[illegible]	11.5	---	---	---	60	---	---	---
-contar hacia atrás hasta	GI	---	---	---	---	33.3	---	---	---	---	---	---	---	---	16.6	22.2
	GII	5	16.7	5.5	---	---	---	[illegible]	---	---	---	---	---	---	8.7	10
	GIII	---	10.4	17.1	---	23.8	---	23.7	5.2	---	---	---	---	---	4.5	12.5
-contar hacia atrás desde lo dado	GI	42.8	37.5	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	42.8	33.3	---
	GII	5	20.8	---	25	90	16.6	---	4.5	---	---	---	---	---	4.3	13.3
	GIII	---	21	---	---	28.5	---	19.4	8.3	20	---	25	---	---	18.2	21.8
MEMORÍSTICAS																
	GI	---	---	---	---	66.6	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
	GII	25	12.5	16.7	50	---	16.6	10	13.6	14.3	---	---	---	42.8	17.4	10
	GIII	28.1	10.4	40	19.4	19.1	100	21.1	56.2	13.3	66.6	50	20	29.6	40.9	28.1
REGLAS	GI	---	---	---	---	---	---	---	11.1	---	---	---	---	---	---	---
	GII	---	8.3	---	---	---	33.3	---	18.2	---	---	---	---	21.4	8.7	6.6
	GIII	18.7	18.7	5.7	11.1	9.5	---	13.1	13.6	---	16.6	25	20	18.5	13.6	12.5
ENSAYO Y ERROR	GI	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
	GII	10	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	14.3	---	---
	GIII	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	44.4	---	---

Destacamos aquí de manera sintetizada dos aspectos. En primer lugar, el tipo de estrategia empleada por los niños parece estar más relacionada con el lugar de la incógnita y el tipo de operación que con la categoría de problema (ver también Carpenter, 1996). Así, por ejemplo, las estrategias de «*ensayo y error*» parecen más ligadas a tareas en las que la incógnita se sitúa en el sumando inicial, mientras que las estrategias de «*contar hacia atrás*» aparecen sobre todo en tareas de sustracción. Igualmente, las estrategias de «*contar todo*» suelen emplearse cuando la incógnita se ubica en el resultado en tareas de adición; en cambio, en las tareas de sustracción prefieren usar la estrategia de «*quitar de*». Finalmente, si el término desconocido se sitúa en el segundo sumando (o término) en la adición suelen utilizar la estrategia de «*contar hacia adelante*» y en la sustracción «*quitar a*».

En segundo lugar, las estrategias de los niños cambian en general en función de su nivel escolar. Los niños de Educación Infantil recurren preferentemente a estrategias de modelado directo, como «*contar todo*». Los de 11 de E.P. utilizan sobre todo las basadas en el conteo (p.e., «*contar hasta*») y los de 21 siguen utilizando las de conteo, pero también otras más sofisticadas como las «*memorísticas*» o el «*cálculo mental*».

7.2.2. Tipos de errores

En este apartado nos interesa examinar si ciertos tipos de errores aparecen más relacionados con determinados problemas que con otros, con el tipo de operación (adición o sustracción), con el lugar ocupado por la incógnita o, finalmente, si son más frecuentes en unos niveles escolares que en otros (ver, por ejemplo, tabla 6 referente a las tareas de sustracción).

Entre los resultados más sobresalientes, destaca el hecho de que las distintas categorías de problemas no se asocian con ningún tipo de error en particular, sino que los errores varían fundamentalmente en función del nivel de escolaridad. Efectivamente, los niños de Educación Infantil cometen errores de *«repetir una de las cantidades»* e *«inventar la respuesta»* en las seis categorías de problemas, independientemente del lugar de la incógnita y del tipo de operación, lo que confirma los resultados obtenidos en otras investigaciones (p.e. Bermejo y Rodríguez, 1988, 1990a y b; Carpenter y Moser, 1981, 1983; Cummins, 1991; De corte y Verschaffel, 1985, 1987). En 11 de E.P. los errores más característicos son los de *«inventar la respuesta»* y *«palabras clave»*. Y, finalmente, en 21 de E.P. predominan los errores de *«transformar el problema»* y *«palabras clave»*, aunque aparece una mayor variabilidad de errores dependiendo del lugar de la incógnita y el tipo de operación.

Por otra parte, se observa una evolución de los errores con la edad, de modo que mientras unos tienden a desaparecer, otros incrementan su presencia. En efecto, el error de *«palabras clave»*, como acabamos de mencionar, es característico de los grupos de Educación Primaria y apenas aparece en Educación Infantil. Algo parecido podemos observar con respecto al error de *«transformar el problema»*, que aparece, por regla general, en los niños de segundo de E.P., debido a que estos escolares tienden a transformar el problema para convertirlo en uno más sencillo (Cummins, Weimer y Kintsch,1988; Cummins, Kintsch, Reuser y Weimer,1988). Así, a estos niños les resulta más fácil la resolución de la forma canónica (a+b=? y a-b=?) que la no canónica (?+b=c y ?-b=c), de modo que tienden a modificar el problema convirtiéndolo en otro con la incógnita en el resultado. Finalmente, el error de *«repetir una de las cantidades»* aparece sobre todo en Educación Infantil, tendiendo a desaparecer con la edad. Así, por ejemplo, en los problemas de Combinación (Cumins, 1991) los niños interpretan la proposición «entre los dos tienen 8 canicas» como si cada uno tuviese 8 canicas; o en los problemas de Comparación entienden la proposición de relación «Javier tiene 6 lápices más que Alberto» como una proposición de asignación «Javier tiene 6 lápices».

Tabla 6.- Errores en tareas de sustracción

		Cambio			Comparación			Igualación			Relacional			Expresión numerica		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
CONCEPTUAL	GI	31.7	25	18.7	59.5	56.5	74.4	54.7	28.6	37.2	19.5	23.1	14.9	26.8	38.1	27.1
-repite una	GII	15.4	30.4	4	30.9	57.1	18.9	12.5	3.3	21.1	11.6	14.6	6.2	4.3	8.7	---
cantidad	GIII	20	16.6	15.4	14.8	5.5	74.2	15.1	5.9	15.4	2.4	4.7	---	---	---	---
	GI	24.4	30	25.6	29.1	26.1	12.7	[illegible]	35.7	27.5	21.3	37.5	13.4	51.2	28.6	32.4
-inventa	GII	30.7	17.4	16	9.5	11.4	4.7	15	23.3	5.2	11.7	6.2	2.1	36.3	47.8	20
	GIII	---	---	---	3.7	16.4	---	5.4	17.6	3.8	---	---	---	6.6	13.3	---
	GI	---	---	---	---	---	---	---	4.7	---	14.9	16.6	29.8	---	---	---
-transforma	GII	---	---	---	4.7	---	6.5	---	[illegible]	2.6	41.7	22.8	35.4	---	---	---
problema	GIII	---	---	---	3.7	33.3	6.4	38.5	11.7	34.6	74.2	66.6	55.9	---	---	---
-no sabe	GI	24.4	25	18.7	9.7	9.7	12.7	9.5	11.9	3.3	19.1	6.2	12.7	9.7	21.4	16.2
hacerlo	GII	15.4	9.7	---	---	[illegible]	---	5	13.3	2.6	---	6.2	2.1	20	8.7	20
	GIII	6.6	---	---	---	5.5	---	---	---	3.9	---	7.1	---	6.6	6.6	40
-palabra	GI	---	---	6.2	---	2.2	---	---	4.7	20.9	8.5	2.1	2.1	---	---	---
clave	GII	23.1	---	---	54.7	17.4	15.2	10	36.8	50	23.5	47.9	47.9	---	---	---
	GIII	53.3	---	---	66.6	22.2	12.9	15.5	23.5	34.6	19.1	14.3	37.2	---	---	---
-no sabe	GI	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
explicarlo	GII	---	---	---	---	5.7	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
	GIII	---	---	---	3.7	---	---	---	5.9	---	---	---	4.6	---	---	---
-no lo	GI	---	---	3.1	---	4.3	---	2.4	---	---	---	---	---	---	---	---
entiende	GII	---	---	8	---	---	4.3	10	---	---	---	2.1	2.1	---	---	---
	GIII	13.3	33.3	23.1	3.7	11.1	3.2	---	---	---	2.4	7.1	2.3	---	---	---
-confunde	GI	7.3	---	---	---	---	---	---	---	---	---	2.1	2.1	---	---	---
ndmeros y	GII	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
letras	GIII	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
PROCEDIMENTALES																
-control	GI	---	---	3.1	---	---	---	---	---	---	---	---	---	4.8	---	5.4
inadecuado	GII	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	20	---	---
operación	GIII	---	---	---	3.7	---	---	---	---	---	---	---	---	46.6	13.3	---
-control	GI	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
inadecuado	GII	7.7	4.3	4	---	---	---	---	3.3	5.2	---	---	---	---	---	---
algoritmo	GIII	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	6.6	---	---
-olvida la	GI	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
decena	GII	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	8.7	---
	GIII	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
-suma las	GI	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
unidades	GII	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	6.6
decenas	GIII	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	6.6	---	---
-no sabe	GI	2.4	7.5	6.2	2.4	2.2	---	2.4	9.5	2.3	2.1	6.2	8.5	2.4	4.7	5.4
con N1	GII	3.8	4.3	4	---	---	---	2.5	---	---	---	---	---	---	4.3	---
grandes	GIII	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
-ensayo y	GI	---	2.5	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
error	GII	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	4.3	---
	GIII	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	6.6	---
EJECUCIÓN																
-conteo	GI	9.7	5	15.6	---	---	---	---	---	2.3	---	---	2.1	2.4	4.7	13.5
	GII	3.8	13.1	60	---	2.8	4.3	---	6.6	7.8	---	---	4.1	13	4.3	40
	GIII	6.6	16.6	38.4	---	---	3.2	16.1	23.5	---	---	---	---	13.3	40	40
-cálculo	GI	---	---	3.1	---	---	---	2.4	---	---	---	---	2.1	2.4	2.4	---
mental	GII	---	21.7	4	---	2.8	---	---	6.6	5.2	2.1	2.1	---	6.3	13.1	13.2
	GIII	---	16.6	23.1	---	5.5	---	---	11.7	7.7	---	---	---	6.6	26.6	20
-confunde	GI	---	5	---	---	---	---	---	---	---	4.2	---	2.1	---	---	---
ndmeros	GII	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
	GIII	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Por último, la evolución de los errores está estrechamente relacionada con la competencia conceptual de los niños. En efecto, mientras que algunos errores se relacionan con la capacidad de ejecución (p.e.,*«contar incorrectamente con los dedos», «estrategias de cálculo mental», «conteo mental», «hacer mal la operación una vez escrito el algoritmo»*), otros tienen que ver, más bien, con el conocimiento conceptual (p.e., *«ensayo y error», «repetir una de las cantidades», «inventar la respuesta», «transformar el problema»*), que son más frecuentes en Educación Infantil.

8. Conclusiones

Entre los resultados más significativos encontrados en esta investigación destacamos los siguientes:

1) Existen diferencias estadísticamente significativas en el rendimiento de los niños en función de su nivel de escolaridad, del tipo de problema y de la ubicación de la incógnita. En cambio, no es significativo el factor operación.

2) Con respecto a los problemas verbales, hemos propuesto una nueva clasificación de los mismos, que resulta más exhaustiva que las categorizaciones clásicas conocidas.

3) Atendiendo al nivel de dificultad de las tareas, hemos obtenido una jerarquización de las mismas, mediante la aplicación del Escalograma de Guttman. El orden encontrado es el siguiente de fácil a difícil:

Combinación con conjunto total desconocido
Cambio con resultado desconocido
Igualación en conjunto desconocido
Cambio con conjunto de cambio desconocido
Igualación en el conjunto conocido
Combinación con parte inicial desconocida
Cambio con comienzo desconocido
Comparación con referente desconocido
Comparación con diferencia desconocida
Igualación con cantidad comparada desconocida
Combinación con segundo término desconocido
Comparación con conjunto de comparación desconocido
Transformación de relaciones con sumando inicial desconocido
Tranformación de relaciones con resultado desconocido
Transformación de relaciones con segundo sumando desconocido.

4) Por último, hubo igualmente diferencias significativas entre los grupos experimentales con respecto al tipo de estrategia utilizado y los errores cometidos, de modo que cada curso tendía a utilizar unas estrategias determinadas y a cometer igualmente unos errores característicos.

Referencias

Bebout, H. (1990). Children's symbolic representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 21,* 123-131.

Bergeron, J. y Hercovics, N. (1990). Psychological aspects of learning early arithmetic. En P. Nesher y Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 31-52). Cambridge: Cambridge University Press.

Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética.* Barcelona: Paidós.

Bermejo, V. (1993). Perspectivas innovadoras en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Investigación cognitiva y práctica educativa. En J. BELTRAN,

V. BERMEJO, M.D. PRIETO y D. VENCE (Coords.). *Intervención Psicopedagógica.* Madrid: Pirámide.

Bermejo, V. y Lago, M.O. (1988). Representación y magnitud de los sumandos en la resolución de problemas aditivos. *Infancia y Aprendizaje, 44,* 109-121.

Bermejo, V., Lago, M.O. y Rodríguez, P. (1994). Problemas verbales de comparación y comprensión de la relación comparativa. *Cognitiva, 6,* 159-174.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje, 39-40,* 71-81.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1988). La genèse de l'operation d'addition. Analyse de quelques variables significatives dans la résolution de problèmes additifs. *European Journal of Psychology of Education, Número Special,* 75-76.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990a). Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos. *Investigaciones Psicológicas, 8,* 23-41.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990b). La operación de sumar. En V. Bermejo, *El niño y la aritmética* (pp. 107-140). Barcelona: Paidós.

Briars, B. y Larkin, J. (1984). An integrated model of skills in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1,* 245-296.

Carpenter, T. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the initial leaming of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 113-132). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. (1996). Classification of addition and subtraction word problems. Children's solution strategies of addition/subtraction problems. (Manuscrito enviado por el autor).

Carpenter, T., Ansell, E., Franke, M., Fennema, E. y Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 24,* 427-440.

Carpenter, T. y Moser, J. (1981). Problem structure and first grade childrens' initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 12,* 27-39.

Carpenter, T. y Moser, J. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. y Moser, J. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquistion of mathematics: Concepts and processes* (pp. 7-44). NY: Academic Press.

Carpenter, T. y Moser, J. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15,* 179-202.

Carpenter, T., Hiebert, J. y Moser, J. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics, 14,* 55-72.

Carpenter, T., Moser, J. y Bebout, H. (1988). Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 19,* 345-357.

Carpenter, T. y Fennema, E. (1992). Cognitively guided instruction: building on the knowledge of students and teachers. *International Journal of Research in Education, 17,* 457-470.

Carpenter, T., Fennema, E., Peterson, P., Chiang, Ch. y Loef. M.(1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal, 26,* 499-531.

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (1987). Written and oral mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18,* 83-97.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B. y Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(1), 3-29.

Cummins, D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction, 8,* 261-289.

Cummins, D., Kintsch, W., Reusser, K. y Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology, 20,* 405-438.

Davis-Dorsey, J., Ross, S. y Morrison, G. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problems. *Journal of Educational Psychology,* 83 (1), 61-68

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1985). Begining first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behaviour, 4,* 3-21.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1987). Using retelling data to study young children's word problem solving. En J. Sloboda y D. Rogers (Eds.), *Cognitive processes in mathematics* (pp. 42-59). NY: Oxford University Press.

De Corte, E., Verschaffel, L. y Pauwels, A. (1990). Influence of the semantic structure of word problems on second graders' eye movements. *Journal of Educational Psychology, 82,* 359-365.

De Corte, E., Verschaffel, L. y De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology, 77,* 460-470.

Fosnot, C. (Ed.) (1996). *Constructivism: Theory,perspectives, and practice.* NY: Teachers College Press.

Fuson, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and leaming* (pp. 243-275). NY: MacMillan.

Heller, J. y Greeno, J. (1978). *Semantic processing of arithmetic word problem solving.* Annual Meeting of the Midwestern Psychological Association. Chicago.

Hiebert, J. (1982). The position of unknown set in children's solutions of verbal arithmetic problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 13,* 341-349.

Hiebert, J. y Carpenter, Th. (1992). Learning and teaching with understanding. En Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and leaming* (pp. 65-100). NY: MacMillan.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development, 54*, 84-90.

Lewis, A. (1989). Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 81*, 521-531.

Lewis, A. y Mayer, R. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problem. *Journal of Educational Psychology, 79*, 363-371.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En T. Carpenter, J. Mooser y T. Romberg (Eds), *Addition and Subtraction: A cognitive Perspective*. (pp. 25-38). Hislldale, NJ: Erlbaum.

Nunes, T. (1992). Ethnomathematics and everyday cognition. En D. A. Grouws, (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-574). NY: MacMillan.

Riley, M., Greeno, J. y Heller, J. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). NY: Academic Press.

Riley, M. y Greeno, J. (1988). Developmental analysis of understanding languaje about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction, 5*, (1), 49-101.

Steffe, L. y Johnson, D. (1971). Problem solving performances of first-grade children. *Journal for Research in Mathematics Education, 2*, 50-64.

Steffe, L., Nesher, P., Cobb, P., Goldin G. y Greer, B. (Eds.) (1996). *Theories of mathematical learning*. N. Jersey: LEA.

Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for childrem?. *Journal of educational Psychology*. 85, (1), 7-23.

van Oers, B. (1996). Learning mathematics as a meaningful activity. En L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin y B. Greer (eds.), *Theories of mathematical learning*. (pp. 91-114). New Jersey: L. E. A.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Pawels, A. (1992). Solving compare problems: an eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology, 84*, (1), 85-94

Willis, G. y Fuson, K. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 80*, 192-201.