Rev. de Psicol. Gral. y Aplic., 1993, *46* (2), 149-160

MODELOS MENTALES Y HABILIDADES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES

A. PUENTE
Universidad Complutense de Madrid

Resumen

Analiza el proceso de adquisición y desarrollo de los modelos mentales y las estrategias cognitivas en la solución de problemas aritméticos de tipo verbal. Especial atención se concede a las investigaciones procedentes de los enfoques cognitivos modernos que demuestran la existencia de modelos y heurísticas más eficientes que los propuestos por los enfoques de aprendizaje asociativo, para la solución de esta clase de problemas. En el análisis se consideran como importantes los siguientes aspectos: factores que influyen en la solución, descripción de los procesos mediante protocolos, cronometría mental, análisis de errores, etc., el papel de los enunciados verbales y las dificultades de comprensión del lenguaje. Finalmente, se describen algunas posibilidades teóricas de cómo los niños suman y restan dos conjuntos y se exponen recomendaciones pedagógicas.

Abstract

The article refers to de acquisition and development of mental models and cognitive strategies in solving arithmetic word problems. Special attention is given to researches coming from modern cognitive approach which shows models and heuristics more eficient than clasic associative learning. The analysis of researches emphasizes facts as follow: factors that affect problem solving, description by protocols, mental cronometry, errors analysis, etc., of the mental processes involved when people solve problems. Finally, a set of pedagogical implications are started and three different instructional models for teaching of problem solving are describen.

Introducción

A pesar de la marcada preocupación, no existe una teoría unitaria que permita guiar la práctica y la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Durante muchos años el enfoque asociacionista de Thorndike (1922) enfatizó la enseñanza siguiendo los principios generales del aprendizaje, subrayando, en particular, la ley del efecto y la ley del ejercicio.

Un enfoque importante y distinto es el de Piaget. Piaget (1967) se interesó en la enseñanza de las matemáticas, pero sobre todo en el desarrollo de las habilidades matemáticas y en los procesos internos, inferidos éstos del análisis de los errores cometidos por los niños. No fueron preocupaciones explícitas de Piaget el aprendizaje del cálculo aritmético, las habilidades básicas de carácter cuantitativo ni el análisis cronométrico; sin embargo, sí fue preocupación relevante el estudio del concepto de número para determinar su origen y función como estructura pivote para la generación de las habilidades aritméticas. Igualmente, estudió profundamente los principios de conservación, correspondencia, seriación e inclusión de clase como determinantes del concepto de número. Piaget, a diferencia del enfoque asociacionista, creía que el conocimiento es una interpretación de la realidad que el sujeto realiza internamente al actuar sobre ella, mientras que para los asociacionistas el conocimiento se origina fuera del sujeto.

Actualmente se está modelando un nuevo paradigma para el análisis e interpretación de los problemas de carácter matemático: el paradigma cognitivo. Este enfoque, en vez de analizar tareas y conductas observables, analiza procesos y conocimientos internos del estudiante. Entre algunos de los aspectos que son objeto de su interés se encuentran: 1) la descripción del contexto dentro del cual se encuentra la tarea; 2) el análisis de todas las conductas asociadas con las respuestas del sujeto para ejecutar la tarea; 3) las mediciones repetidas de las ejecuciones; 4) las inferencias acerca de los mecanismos cognitivos que relacionan tanto la información acerca de la tarea y la ejecución como acerca de los cambios en esa ejecución; 5) la representación del problema, y 6) las estrategias y planes de resolución de un problema o tarea.

Una de las contribuciones más importantes de la psicología cognitiva son las técnicas para representar el conocimiento y el procesamiento cognitivo de las personas (Mayer, 1981b). En particular, las siguientes cuatro herramientas son relevantes:

Modelos de Comprensión. Estos modelos consisten en descripciones de cómo las personas traducen las palabras de un problema a una representación interna. Por ejemplo, cómo se representa en la memoria «Tom tiene cinco canicas más que Pedro».

Modelos de Esquema. Los modelos de esquemas describen cómo las personas seleccionan e integran la información en una representación coherente. Por ejemplo, dado un conjunto de problemas de tipo verbal, ¿cómo puede una persona clasificarlos en problemas tipo?

Modelos de Proceso. Estos modelos describen los pasos que una persona sigue mientras ejecuta o realiza alguna operación cognitiva bien definida, tal como el procedimiento para resolver una división.

Modelos de Estrategias. Estos modelos describen cómo las personas establecen, logran y supervisan los objetivos mientras ejecutan una actividad cognitiva compleja, como, por ejemplo, generar una prueba para un problema de geometría.

Hacia una taxonomía de factores que afectan el éxito en la solución de problemas

Desde el punto de vista de la psicología cognitiva, se han revisado los factores que afectan el éxito en la solución de problemas en general; y, particularmente, en el área de las matemáticas.

Lester (1983) identificó un conjunto de categorías que permite agrupar los factores en: 1) factores vinculados a la tarea; 2) factores relacionados con los procesos; 3) factores dependientes del sujeto, y 4) factores ambientales.

Factores vinculados a la tarea

Los factores vinculados a la tarea son aquéllos asociados con la naturaleza del problema; por ejemplo, contenido, estructura, contexto y sintaxis.

La mayor parte de las investigaciones previas a los años setenta pretendían aislar los determinantes claves de la dificultad del problema mediante técnicas como la regresión múltiple. Sin embargo, como señala Jerman (1973), dada la ausencia de una teoría era difícil distribuir pesos óptimos por factor y, por tanto, no se podían establecer con precisión variables predictoras.

Actualmente, los análisis de regresión múltiple han sido reemplazados por otras técnicas. Por ejemplo, el análisis estado-espacio ofrece una representación completa de los algoritmos y estructuras lógicas de una tarea e igualmente permite estudiar el efecto de la estructura del problema en la ejecución de quien lo resuelve. Los trabajos de Goldin (1979) son ejemplos representativos de esta clase de investigaciones.

Lester (1978) determinó un grupo de factores de la tarea, previa observación y entrevista de un número considerable de estudiantes que resolvían problemas matemáticos. Entre los factores encontrados se pueden mencionar los siguientes: ambiente de la tarea, complejidad de la estructura del problema, contenido y estrategias aplicables.

Factores dependientes del sujeto

Clásicamente se ha considerado que las características del sujeto juegan un papel importante en el éxito o fracaso en la solución de un problema. Algunos factores comúnmente invocados son: el conocimiento matemático, la experiencia previa, la habilidad lectora, la perseverancia, la tolerancia a la ambigüedad, las habilidades espaciales, la edad y el sexo.

Actualmente, existe una tendencia que se orienta hacia la construcción de modelos que representan las diferencias entre solucionadores de problemas eficientes y deficientes (Larkin, McDermont, Simon y Simon, 1980).

Chi, Feltovich y Glaser (1981) y Chi, Glaser y Rees (1981) compararon el comportamiento de expertos y novatos en relación a la forma como representaban problemas de mecánica. Los resultados demuestran que los aprendices tienden a representar los problemas en términos de características superficiales (planos inclinados, poleas, fricción, etc.), mientras que los expertos categorizan los problemas según ciertos principios fundamentales implícitos (principios de conservación de la energía, tercera ley de Newton, etc.).

Los expertos poseen mayor información que los novatos y esto facilita la representación del problema en términos de esquemas, estructuras sustantivas, procedimientos y fórmulas heurísticas. Las representaciones abstractas habilitan a los expertos para enfrentar con mayor eficiencia los problemas.

De los modelos mencionados se han obtenido diferencias considerables entre expertos y novatos solucionadores de problemas en aspectos vinculados con la percepción de la estructura del problema, la organización de los elementos dados y supuestos, el nivel lingüístico, el reconocimiento de patrones en la memoria y la capacidad de transferencia hacia situaciones nuevas.

Factores relacionados con los procesos

Los procesos mentales desarrollados por el sujeto mientras resuelve un problema están siendo objeto de un extenso estudio por parte de los psicólogos del paradigma cognitivo. Por ejemplo, la mayor parte de las investigaciones en el área de la matemática, directa o indirectamente, tienen por objeto describir y crear modelos que reflejen los procesos implícitos. Dentro de este marco se encuentran los trabajos de Suppes y Groen (1967), quienes exploraron cómo los niños de los primeros grados resolvían problemas de suma con números menores de diez. Se examinaron cinco modelos del tipo $M + N = ?$ A partir de estos trabajos se han estudiado muchos otros procesos aritméticos, tales como resta, multiplicación y fracciones, y los modelos se han extendido para explicar otros procesos (Ashcraft, Fierman y Bartolotta, 1984).

Una de las áreas que ha arrojado más información en el análisis de procesos es la aritmética mental (análisis cronométrico). En esencia, esta técnica consiste en medir el tiempo que un sujeto requiere para dar respuesta a un problema. Se supone que este tiempo debe estar en función del número de los procesos cognitivos requerido para resolver la tarea. Groen y Parkman (1972) desarrollaron algunas investigaciones que merecen un breve análisis. En su primer estudio presentaron a niños de primer grado problemas de suma del tipo $3 + 2 = ?$ Los niños recibieron la instrucción de emitir la respuesta en el tiempo más breve posible. Groen y colaboradores comprobaron que los datos obtenidos se ajustaban al algoritmo simple de la suma, el cual consiste en tomar el valor del sumando mayor e ir añadiendo hacia arriba el número de veces que indica el sumando menor.

Factores ambientales

Existe un gran número de factores externos que pueden influenciar la ejecución en la solución de problemas. Sin embargo, la comunidad de educadores del área de las matemáticas, en su mayoría, está de acuerdo en concentrar su esfuerzo alrededor de factores relacionados con la instrucción: 1) Instrucción para desarrollar estrategias expertas de pensamiento; 2) instrucción para enseñar el uso de herramientas específicas de pensamiento; 3) instrucción para enseñar el uso de reglas específicas de carácter heurístico, y 4) instrucción para enseñar el uso de reglas generales de carácter heurístico.

Las *estrategias expertas de pensamiento* pueden ser utilizadas independientemente del tipo y de la naturaleza del problema y se orientan hacia el desarrollo de un pensamiento original, divergente, y de actitudes positivas hacia la solución de problemas.

Las *herramientas específicas de pensamiento* son estrategias que tienden a equipar al sujeto que resuelve problemas con un conjunto de habilidades que supuestamente intervienen favorablemente, aunque su eficiencia no ha sido convincentemente comprobada.

Los métodos instruccionales diseñados para el entrenamiento en *estrategias heurísticas generales* o *específicas* son básicamente los propuestos por Polya (1965). Entre las estrategias heurísticas específicas están: simplificar el problema, trabajar hacia atrás, etc. Este tipo de estrategias son útiles solamente en algunos casos particulares. Las estrategias heurísticas generales son utilizadas en un amplio rango de problemas y las principales son: medios-fin, planeamiento y organización de la información.

Además del entrenamiento en las cuatro estrategias descritas, actualmente se está enfatizando mucho en el entrenamiento en estrategias cognitivas y metacognitivas. Este último tipo de estrategia comprende, por una parte, estrategias que permiten desarrollar en los estudiantes formas para evaluar de manera precisa lo que pueden aprender así como también conocer y reflexionar sobre sus procesos de pensamiento; y, por la otra, estrategias de control o autorregulación, las cuales incluyen: 1) asegurarse que comprendemos de qué se trata el problema antes de intentar una solución; 2) planificar; 3) chequear y supervisar si estamos ejecutando bien los pasos durante el proceso de resolución, y 4) establecer qué fuentes necesitamos, qué hacer y por cuánto tiempo vamos a trabajar en el problema. La autorregulación es fundamental ya que no sólo es importante lo que se sabe sino cómo se utiliza ese conocimiento. La diferencia que pueda existir entre un experto y un novato en el área de las matemáticas no sólo se debe a que existe una diferencia en el conocimiento que tiene uno y otro, sino también a cómo el experto utiliza lo que sabe (Schoenfeld, 1987). En líneas generales, a los estudiantes se les enseña a discutir con sus compañeros, a pensar en voz alta, a resolver problemas en grupos pequeños, etc. Estas actividades generan mayor nivel de conciencia acerca de los procesos que desarrollan a medida que resuelven los problemas.

Metodologías en el análisis de procesos

Analizar procesos es una tarea científica que presenta algunas dificultades metodológicas. Las técnicas y estrategias clásicas, útiles en el abordaje de ciertos aspectos psicológicos, presentan severas limitaciones para explorar procesos y, por ende, se deben diseñar técnicas nuevas que se ajusten al objeto de estudio. Estas técnicas nuevas deben permitir la inferencia de procesos y operaciones con un nivel de certeza suficientemente confiable. Algunas técnicas utilizadas son: la aritmética mental, el análisis de protocolos, los estudios clínicos o de casos, la entrevista individual y el análisis de los patrones de errores.

Aritmética mental

Los análisis del tiempo de reacción se han aplicado con éxito en el estudio de tareas simples y relativamente directas, tales como juzgar «más que» y «menos que» (Moyer y Landauer, 1967; Restle, 1970; Sekuler, Rubin y Armstrong, 1971), juzgar si una ecuación numérica simple es correcta o no (Parkman y Groen, 1971) y calcular hechos numéricos de un solo dígito (Groen y Parkman, 1972; Suppes y Groen, 1967). Pero en estas tareas la ejecución sigue un conjunto bastante estricto y limitado de reglas o algoritmos, y se realizan rápidamente sin mucho procesamiento consciente por parte del individuo.

La técnica supone la existencia de modelos hipotéticos del tiempo y los pasos requeridos para resolver la tarea. El problema aritmético se divide en pequeñas unidades discretas denominadas operaciones. Uno de los supuestos principales de esta técnica es que el tiempo requerido para resolver un problema es una función lineal del número de pasos requeridos.

Las limitaciones de los estudios cronométricos tienen que ver con algunos de los siguientes supuestos: 1) los sujetos no siempre son consistentes en el uso de las mismas estrategias, aunque se trate de problemas idénticos o similares, y 2) no existe una comprobación fuerte que demuestre que los tiempos para cada paso sean una constante.

Análisis de protocolos

Cuando las tareas son más complejas —cuando hay varios pasos que realizar, cuando se pueden seguir estrategias de solución alternativas y cuando las pausas y las consideraciones son usuales en el transcurso de una solución— los tiempos de reacción no son un método apropiado de análisis. Para analizar la ejecución en estas tareas más complejas se emplea la técnica del análisis de protocolos.

Los esquemas de protocolos se refieren a la producción de las secuencias de pasos de las acciones observables desarrolladas por un sujeto cuando resuelve una tarea o problema. Estos esquemas de pasos han sido utilizados en forma extensiva en el área de la Inteligencia Artificial y en el área de la enseñanza de las matemáticas. En IA, el análisis de protocolos tiene como propósito el descubrimiento de las regularidades de la conducta de quien resuelve el problema. Los protocolos suelen, posteriormente, traducirse en programas que simulan, a través del computador, el comportamiento ideal de un sujeto.

En el área de las matemáticas, los protocolos tienen como propósito realizar análisis cualitativos que permitan describir las estrategias útiles o documentar acerca del nivel de su efectividad.

Kilpatrick (1967) diseñó un protocolo riguroso que sirvió de paradigma para muchos desarrollados a posteriori. En dicho protocolo se esquematizan diversas conductas heurísticas consideradas importantes en la solución de problemas matemáticos.

El nivel de análisis debe ser tan fino como sea posible, y una vez definida la secuencia, ésta puede convertirse en símbolos, los que, posteriormente, sirven como fuente de datos para análisis estadísticos.

Aunque los protocolos codifican básicamente conductas observables en secuencia, éstos pueden ser enriquecidos por otras técnicas complementarias como es el caso de la técnica de «pensar en voz alta» o las «introspecciones conscientes verbalizadas». Es decir, la conducta implícita puede ser explicitada por el sujeto. Las técnicas complementarias deben ser consideradas con cierta cautela pues en niños pequeños las verbalizaciones suelen ser pobres y cargadas de omisiones y distorsiones. Se recomienda su uso en adultos y en niños de los grados superiores.

Estudios clínicos o de casos

Se analizan en este punto, particularmente, los experimentos en la enseñanza de las matemáticas. Esta técnica de análisis ha sido promovida por la escuela rusa.

Kantowski (1978) describe en forma concisa en qué consiste: 1) el diseño no es experimental; 2) se trata de un estudio longitudinal; 3) se intenta captar procesos y cómo éstos se desarrollan; 4) el profesor no es una variable control, por el contrario, es elemento vital del ambiente, y 5) los análisis cualitativos de los datos son más importantes que los análisis cuantitativos.

Los estudios clínicos son experimentos desarrollados en ambientes naturales donde se pretende explorar toda la riqueza y diversidad que normalmente lleva implícita la escuela y los procesos que en ella se desarrollan.

El resurgimiento de la técnica de estudios de casos se debe entre otras causas al impulso dado por Piaget, la escuela rusa y las contribuciones de otras disciplinas como la psicología social, la antropología, etc. Esta metodología ha probado ser eficiente para comprobar hipótesis, replicar experiencias y establecer predicciones.

La entrevista individual

Una manera directa de indagar acerca de los procesos es a través de la entrevista (Steffe, Thompson y Richard, 1982). Se suelen presentar a los sujetos los problemas en forma individual y a partir de los registros de observación de la conducta y algunas preguntas formuladas por el entrevistador se infieren los procesos. Existen ciertas limitaciones a esta técnica: 1) las explicaciones dadas por los niños no suelen ser muy precisas y pueden no reflejar los procesos desarrollados, y 2) las inferencias extraídas por el entrevistador pueden presentar un alto grado de subjetividad.

Análisis de errores

Esta técnica ha sido muy útil en el diagnóstico de los errores y dificultades encontradas por los niños sobre todo en la resolución de problemas aritméticos de tipo verbal (Riley, Greeno y Heller, 1982).

Algunos psicólogos de la línea dura han criticado algunas de estas técnicas por considerarlas muy débiles, algo especulativas y con bajo poder predictivo. Sin embargo, la metodología empírica no se escapa a ciertas críticas importantes: 1) un buen diseño experimental no necesariamente asegura que se estén estudiando las interrelaciones importantes, sobre todo cuando el objeto de estudio implica variables procesos y variables complejas; 2) existen múltiples resultados contradictorios en diversas áreas de la psicología y la educación, a pesar del uso de metodologías similares, y 3) existen muchos procesos que no pueden ser descritos y explicados partiendo de la metodología experimental.

Problemas de suma y resta de tipo verbal

Existe un consenso bastante generalizado entre maestros y profesores del área de matemáticas que consideran que los problemas aritméticos expresados en palabras presentan mayor difcultad que los problemas presentados numéricamente. Este hecho ha conducido a muchos investigadores a estudiar cuáles son las posibles variables que intervienen en el fenómeno.

Carpenter (1985) demostró que las principales variables son de naturaleza lingüística; es decir, variables sintácticas, variables semánticas o una combinación de ambas. Entre las variables sintácticas se encuentran el número de palabras, la secuencia de la información y la presencia de alguna palabra clave que pueda elicitar la realización de alguna operación. Sin embargo, se considera que las variables semánticas son las más importantes en la determi-

TABLA 1

Clasificación de problemas de tipo verbal

CAMBIAR	
Juntar	*Separar*
1. Connie tenía 5 años. Jim le dio 8 más. ¿Cuántas canicas tiene Connie en total?	2. Connie tenía 13 canicas. Le dio 5 a Jim. ¿Cuántas canicas le quedan?
3. Connie tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas más necesita para tener 13?	4. Connie tenía 13 canicas. Le dio algunas a Jim y ahora le quedan 8. ¿Cuántas canicas le dio Connie a Jim?
5. Connie tenía algunas canicas. Jim le dio 5 canicas más y ahora tiene 13 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Connie al principio?	6. Connie tenía algunas canicas. Le dio 5 a Jim. Ahora le quedan 8. ¿Cuántas canicas tenía Connie al principio?
COMBINAR	
7. Connie tiene 5 canicas rojas y 8 azules. ¿Cuántas canicas tiene en total?	8. Connie tiene 13 canicas. Cinco son rojas y el resto son azules. ¿Cuántas canicas azules tiene Connie?
COMPARAR	
9. Connie tiene 13 canicas y Jim tiene 5. ¿Cuántas canicas más tiene Connie que Jim?	10. Connie tiene 13 canicas y Jim tiene 5. ¿Cuántas canicas menos tiene Jim que Connie?
11. Jim tiene 5 canicas. Connie tiene 8 más que Jim. ¿Cuántas canicas tiene Connie?	12. Jim tiene 5 canicas. Él tiene 8 canicas menos que Connie. ¿Cuántas canicas tiene Connie?
13. Connie tiene 13 canicas. Ella tiene 5 canicas más que Jim. ¿Cuántas canicas tiene Jim?	14. Connie tiene 13 canicas. Jim tiene 5 canicas menos que Connie. ¿Cuántas canicas tiene Jim?
IGUALAR	
15. Connie tiene 13 canicas. Jim tiene 5. ¿Cuántas canicas tiene que ganar Jim para tener tantas canicas como Connie?	16. Connie tiene 13 canicas. Jim tiene 5. ¿Cuántas canicas tiene que perder Connie para tener tantas canicas como Jim?
17. Jim tiene 5 canicas. Si él gana 8, tendrá el mismo número de canicas que tiene Connie. ¿Cuántas canicas tiene Connie?	18. Jim tiene 5 canicas. Si Connie pierde 8 canicas, tendrá tantas canicas como Jim. ¿Cuántas canicas tiene Connie?
19. Connie tiene 13 canicas. Si Jim gana 5 canicas, tendrá tantas como Connie. ¿Cuántas canicas tiene Jim?	20. Connie tiene 13 canicas. Si ella pierde 5, tendrá tantas canicas como Jim. ¿Cuántas canicas tiene Jim?

FUENTE: Carpenter y Moser, 1984.

nación de los procesos usados por los niños en la solución de problemas aritméticos de tipo verbal. En consecuencia, la mayor parte de las investigaciones han explorado estos aspectos.

La estructura semántica de los problemas de suma y resta ha sido clasificada en términos de cuatro operaciones básicas: cambiar, combinar, comparar e igualar. Las cuatro operaciones determinan cuatro tipos de problemas cuyo nivel de dificultad diferirá dependiendo de la operación requerida (tabla 1).

Los problemas tipo *cambio* pueden ser «juntando cosas» o «separándolas». En el caso de un problema que implique cambio juntando objetos hay una cantidad inicial y una acción directa o implícita que causa un incremento en la cantidad de los objetos. Cuando el cambio es separando-objetos, existe un conjunto de objetos dado y un subconjunto que debe ser removido del conjunto mayor produciendo un decremento. En ambos casos, los cambios ocurren en el tiempo. Existe una condición inicial (C_1), la cual es seguida de un cambio (C_2) y que produce un resultado final (C_3).

En los problemas de cambio, sea éste «juntando» o «separando» objetos, se presentan tres modalidades. En la primera modalidad se da la cantidad inicial y la magnitud del cambio y el sujeto debe obtener el resultado. En la segunda modalidad, se conoce la cantidad inicial y el resultado y el sujeto debe obtener la magnitud del cambio. En la tercera modalidad, la cantidad inicial es desconocida y los otros elementos son dados (segundo sumando y resultado).

Los problemas del tipo combinación y comparación involucran relaciones estáticas, no existen acciones. En los problemas de *combinación* se pueden presentar dos tipos: en el primero, se dan dos conjuntos y se pregunta por el resultado; en el segundo, se da la cantidad de un conjunto y la cantidad de la unión y se pregunta por la cantidad del otro conjunto.

Los problemas de *comparación* implican comparaciones de dos conjuntos distintos (disjuntos). Uno de los conjuntos cumple funciones de «referente» y el otro funciones de «comparado». El tercer elemento del problema es la diferencia o la cantidad que excede entre ambos conjuntos. Cada uno de los elementos puede servir de incógnita.

Los problemas de *igualación* son un híbrido de los problemas de comparación y cambio y aunque no es frecuente encontrarlos en las actividades de aula sí se han observado en algunos trabajos experimentales en la Unión Soviética y el Japón.

Estrategias de suma

Existen tres niveles de estrategias para realizar sumas y restas: modelamiento directo con objetos o con dedos, conteo de secuencias y hechos numéricos.

En operaciones de sumas por modelamiento directo, los niños utilizan la estrategia de «contar todos» *(counting all)*. La estrategia más primitiva consiste en usar objetos o los dedos como formas para representar los elementos de los conjuntos.

Seguidamente se empieza a contar todos y cada uno de los elementos de ambos conjuntos unidos. Contar todos los elementos es una estrategia temprana que utiliza la experticia del niño en el conteo. Para un problema como $M + N = ?$, la estrategia del niño es comenzar desde cero, luego incrementar M veces y luego N veces. En un estudio, Fuson (1982) encontró que aproximadamente el 20 por 100 de los niños entre 6 y 8 años utilizan esta estrategia, al menos, parte del tiempo.

Teóricamente, existen dos formas posibles para desarrollar la estrategia. Una vez que los conjuntos son construidos, el niño físicamente puede juntar los dos conjuntos y una vez unidos comenzar a contar las unidades, o puede comenzar a contar sin unir físicamente los conjuntos. La primera forma representa adecuadamente el tipo de acción descrita anteriormente como cambio-juntando-objetos; mientras que la segunda traduce más bien relaciones estáticas entre los conjuntos. Algunos niños usan diversas formas de organización de los elementos pero estos arreglos diferentes no reflejan cambios en la estrategia.

El segundo nivel de la estrategia es el *conteo hacia adelante (counting on)*, partiendo del primer sumando o del sumando mayor. Esta estrategia es más eficiente y menos mecánica que la estrategia de modelamiento directo. El niño se ha dado cuenta que no es necesario construir la secuencia completa para contar. Contar hacia adelante es una estrategia más sofisticada que la estrategia de simple conteo (Mayer, 1986). Para un problema del tipo $M + N = ?$, la estrategia del niño es comenzar con M y luego incrementar N veces (conteo a partir del primer sumando). Una versión modificada de esta estrategia es lo que Groen y Parkman (1972) denominan el modelo min. En esta estrategia, el niño comienza con el mayor de los sumandos y luego incrementa con el menor. Por ejemplo, para $3 + 4 = ?$, el niño dice «cuatro», y luego «cinco, seis, siete» (conteo hacia adelante partiendo del sumando mayor), la respuesta es «siete».

La resolución de problemas aritméticos no sólo se obtiene por modelamiento o conteo. Los niños aprenden una cantidad de hechos numéricos tanto en la escuela como fuera de ella y los aplican para resolver diversidad de problemas. El estudiante memoriza una respuesta para cada problema simple, tal como es la respuesta de $2 + 2$. Hechos de esta clase son aprendidos incluso antes de estudiar la tabla de la suma y reciben el nombre de *hechos conocidos*.

La etapa de los *hechos derivados* se refiere a que el estudiante utiliza el conocimiento de algunos hechos numéricos para encontrar la respuesta a problemas relacionados. Por ejemplo, para el niño que aprendió un hecho como $6 + 6 = 12$, su recuperación es prácticamente automática. Si posteriormente el niño debe resolver el problema $6 + 8 = ?$, lo podrá solucionar de la siguiente manera: «si

6 + 6 = 12 y 8 es dos veces mayor que 6, la respuesta es catorce».

Estrategias de resta

En las operaciones de resta se dan básicamente los mismos niveles descritos anteriormente para la suma: modelamiento directo (objetos o dedos), conteo y recuperación a partir de hechos numéricos. En relación a los dos primeros niveles, los niños pueden utilizar diversas estrategias (tabla 2). Las estrategias principales por modelamiento directo son: *separando de (separating from), separando a (separating to), sumando hacia adelante (adding on)* e *igualación (matching)*. Las estrategias por conteo son las siguientes: *contar hacia atrás a partir de (counting down from)*, contar *hacia atrás hasta (counting down to)* y *contar hacia adelante a partir de un número dado (counting up from given)* y *selección (choice)*.

La estrategia «separando de» implica un proceso de sustracción. La cantidad mayor (minuendo) es representada en primer lugar y posteriormente la cantidad menor (sustraendo) es separada de aquélla. La respuesta se obtiene contando los objetos no separados del conjunto mayor.

Las estrategias por medio del conteo son paralelas a las estrategias por modelamiento directo. La diferencia más importante es que en el modelamiento directo el niño realiza las operaciones manipulando objetos. Los objetos concretos le brindan más seguridad en el desarrollo de las operaciones, pero el proceso cognitivo implícito es similar. Por ejemplo, en el nivel de conteo la estrategia paralela a «separar de» es «contar hacia atrás a partir de». El niño toma como punto de partida el número mayor y de allí comienza a contar hacia atrás; por ejemplo, 8 − 4 = ?, el niño comienza con 8; menos uno 7, menos uno 6, menos uno 5, menos uno 4. La respuesta es 4. Esta secuencia contiene tantas denominaciones (nombres de números) como indica el número menor (sustraendo). El último número de la secuencia es la respuesta.

La estrategia «separar a» es muy similar a la estrategia «separar de», exceptuando que en la pimera se van removiendo del conjunto mayor todos los elementos que sean necesarios hasta igualar el número de objetos no removidos con el número de elementos contenidos en el conjunto menor. La respuesta se obtiene contando el número de elementos removidos. Por ejemplo, 6 − 2 = ?

En el nivel de conteo la estrategia paralela a «separar de» es «contar hacia atrás hasta». Esta estra-

TABLA 2

Estrategias de resta

Tipo	Descripción
Modelamiento directo	
Separar de:	Usando objetos o dedos, se construye un conjunto de objetos. Se remueven «b» objetos. La respuesta es el número de los objetos que quedan.
Separar a:	Se cuenta un conjunto de «a» elementos. Los elementos se remueven hasta que el número de elementos que quedan es igual a «b». La respuesta es el número de los elementos removidos.
Contar hacia adelante:	Se construye un conjunto de «b» elementos. Los elementos son añadidos a este conjunto hasta que hay un total de «a» elementos. La respuesta se consigue contando el número de elementos añadidos.
Igualar:	Un conjunto de «a» objetos y un conjunto de «b» objetos se igualan uno a uno hasta que uno de ellos tiene el número de objetos que queda en el conjunto no igualado.
Conteo	
Contar hacia atrás desde:	Se comienza la secuencia de conteo hacia atrás comenzando desde «a». La secuencia contiene «b» denominaciones de números. El último número en la secuencia de conteo es la respuesta.
Contar hacia atrás hasta:	Se comienza la secuencia de conteo hacia atrás comenzando con «a» y se continúa hasta que se llega a «b». La respuesta es el número de palabras en la secuencia de conteo.
Contar hacia adelante a partir de un número dado:	Se comienza la secuencia de conteo hacia adelante comenzando con «b» y se continúa hasta que se llega a «a». La respuesta es el número de palabras contadas en la secuencia.
Selección:	Se utiliza ya sea «separar de» o «contar a partir de un número dado», dependiendo de cuál de las dos estrategias sea más eficiente.

a. Para a − b = ? o b + ? = a. (Tomado de Carpenter, 1985.)

tegia consiste en contar hacia atrás partiendo del conjunto mayor hasta que se llega al número menor. La respuesta es el número de palabras en la secuencia de conteo.

El tercer par de estrategias involucra adición (suma). El niño comienza con la cantidad menor y va sumando hasta construir el conjunto mayor. Cuando se trabaja con objetos concretos, el niño coloca un número de objetos igual al número menor dado y entonces se van añadiendo objetos al conjunto, uno cada vez, hasta que el conjunto sea igual al número mayor. Contando el número de objetos añadidos se obtiene la respuesta.

La estrategia paralela de conteo se denomina «contar hacia adelante a partir de un número dado» en la cual el niño comienza a contar hacia adelante partiendo del número menor. La secuencia finaliza cuando se alcanza el valor del número mayor. La respuesta se obtiene contando el número de palabras de la secuencia. Por ejemplo, $7 - 3 = ?$; más uno 4, más uno 5, más uno 6, más uno 7. La respuesta es 4.

La última estrategia básica es llamada «igualación» *(matching)*. Esta estrategia es útil solamente cuando se tienen objetos concretos disponibles. El niño coloca, por ejemplo, dos conjuntos de cubos y, posteriormente, comienza a parear los cubos de dos en dos; uno en cada conjunto. Este procedimiento continúa hasta que se agoten todos los posibles pareos. La respuesta se obtiene contando el número de los cubos que no pudieron ser pareados.

La estrategia de selección involucra una combinación de contar en orden decreciente y contar en orden creciente dependiendo de cuál es la más efectiva. El niño decide cuál estrategia requiere el menor número de pasos para contar, y en este sentido, procede en consecuencia. Por ejemplo, para solucionar $8 - 3 = ?$, podría resolverse empezando a contar desde 8 y luego disminuir tres veces; para $8 - 5 = ?$ podría resolverse empezando a contar desde 5 y luego incrementar tres veces.

Desarrollo de las estrategias de suma y resta

Las estrategias analizadas de suma y recta representan diversos grados de abstracción y sofisticación. Por ejemplo, las estrategias de modelamiento directo con objetos es un nivel de estrategias relativamente primitivo y de carácter concreto que corresponde a los primeros estadios de desarrollo de la inteligencia según Piaget. Sin embargo, las estrategias de conteo requieren habilidades que implican la representación abstracta del mundo de lo concreto y, por tanto, se trata de un nivel de estrategias más sotisficado.

Esta diferencia entre los niveles de estrategias y las estrategias propiamente dichas determinará que los niños, dependiendo de su nivel de desarrollo intelectual, maduración, edad y algunos otros factores, usen una u otra estrategia para resolver los problemas aritméticos y algebraicos.

Globalmente, se pueden adelantar algunas conjeturas que parcialmente han sido comprobadas empíricamente.

1. Los niños menores tienden a utilizar estrategias de carácter concreto (modelamiento directo con objetos o dedos) ya que les permite seguir con mayor confianza la secuencia de conteo y chequear el proceso varias veces. Los niños mayores usarán preferiblemente estrategias más eficientes en términos de tiempo.
2. Los niños cambian las estrategias varias veces durante el proceso de adquisición de una determinada habilidad aritmética o algebraica.

Los niños de menor edad inician sus procesos de suma con la estrategia «contar todos»; es decir, representan los dos sumandos mediante objetos o dedos y posteriormente se cuentan todos los elementos de los conjuntos uno a uno (Suppes y Groen, 1967, modelo 1). Una vez adquirida dicha estrategia, los niños recurren a estrategias de conteo que consisten en comenzar a contar el segundo sumando partiendo del número del primer sumando (modelo 3). Esta estrategia ha sido denominada «contar hacia adelante» (Fuson, 1982). Una vez consolidada esta última estrategia, los niños se encuentran preparados para usar otros procedimientos más sotisficados como el modelo min (modelo 5). En este modelo se asume que el niño selecciona el sumando mayor y de ahí se le suma el conjunto menor.

En la descripción de los cambios que ocurren durante el desarrollo de los niños, Siegler y Shrager (1983) sugieren una estrategia de selección, la cual depende de las características de los individuos. La propuesta supone que los niños, en una primera instancia, tratan de resolver los problemas por recuperación de hechos numéricos almacenados en la memoria. Si este procedimiento no resulta eficiente, se elabora una nueva representación del problema y seguidamente se vuelve a intentar resolverlo por el mismo procedimiento de recuperación. Si en este segundo intento se fracasa, los niños prueban una estrategia diferente; por ejemplo, alguna estrategia de conteo. Es decir, los modelos de conteo se utilizan solamente cuando la recuperación de los hechos almacenados en la memoria no ha sido eficiente para resolver el problema.

Carpenter y Moser (1984), en un estudio longitudinal que incluyó niños de primero, segundo y tercer grado, exploraron las estrategias utilizadas y su frecuencia de uso. En el primer grado, las respuestas de los niños se basaron mayoritariamente en la estructura del problema (véase tabla 1). Casi todos los niños del primer grado, que resolvieron correctamente los problemas, usaron la estrategia «separar de» para aquella clase de problemas cuya estructura implicaba cambio-separando, y la estrategia «contar hacia adelante» o «contar a partir del número dado» para aquellos problemas cuya estructura implicaba cambio-juntando. Con una frecuencia menor también se encontró que algunos niños usan la estrategia de igualación (Fig. 1).

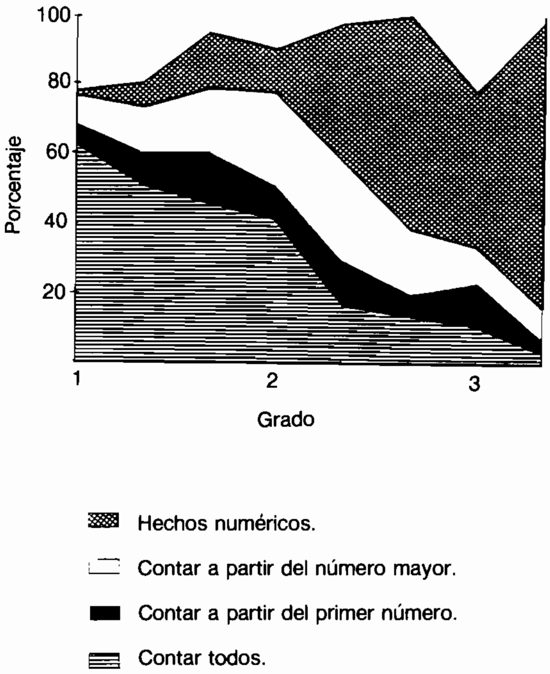

Figura 1. Uso de las estrategias en los diferentes grados en problemas de adición con hechos numéricos y objetos manipulables disponibles. (Tomado de Carpenter y Moser, 1984.)

En los niños de segundo grado, se encontró que aproximadamente un tercio de las respuestas se basó en la recuperación de hechos numéricos y en la estructura de los problemas presentados; sin embargo, la estructura mostró tener un efecto importante para la mayoría de los estudiantes a todo lo largo del segundo grado. El 42 por 100 de los niños de segundo grado utilizaron la estrategia de sustracción para resolver problemas que implicaban cambio-separando, y el 11 por 100 usaron estrategias de naturaleza aditiva. Para aquellos problemas cuya estructura implicaba «comparar», la estrategia de igualación no parece ser muy eficiente y los niños en este nivel prefieren usar las estrategias de «separar de» o «contar hacia adelante a partir de un número dado».

Los niños del tercer grado masivamente recurren al uso de la estrategia de hechos numéricos y muestran bastante flexibilidad en el uso de estrategias de conteo. Para aquellos problemas de separación, la estrategia más popular, además de la recuperación de hechos numéricos, fue contar hacia adelante a partir de un número dado. La estrategia de igualación se redujo considerablemente y se observaron estrategias de carácter sumativo en un porcentaje considerable cuando el tipo de problema era de cambio-juntando.

En términos generales, los resultados pueden resumirse en los siguientes aspectos: 1) los niños inicialmente ensayan estrategias del tipo «contar todos», la cual paulatinamente se va disipando para dar origen a otras más eficientes como «contar hacia adelante» y recuperación de hechos numéricos conocidos, y 2) a pesar de que existe una variabilidad considerable en el uso de las estrategias, dependiendo del tipo de problema, la estrategia «contar hacia adelante» presenta un alto porcentaje de uso y perdura a lo largo de varios niveles de desarrollo en los niños examinados.

Aunque la mayoría de las conclusiones expuestas tienen que ver con la adquisición y uso de las estrategias de suma, gran parte de los investigadores están de acuerdo en señalar que un fenómeno similar ocurre con las estrategias de resta. Incluso se observa, en algunos trabajos, cómo los niños recurren indistintamente a las estrategias que implican acciones aditivas o sustractivas no importando mucho si el problema es de suma o de resta.

Carpenter (1985) presenta una jerarquía de niveles en cuanto a la habilidad para resolver problemas de suma y resta.

Nivel 1. Los niños pueden resolver problemas sencillos de suma y resta usando objetos físicos para representar las acciones y relaciones del problema. Problemas del tipo «juntar» y «combinar» son resueltos por la estrategia de «contar todos»; problemas del tipo «separar» son resueltos por medio de la estrategia «separar de» (véase tabla 1, problemas 1 y 7). Aquellos problemas que no sean fácilmente modelados no serán incluidos en este nivel.

Nivel 2. El nivel 2 es de transición. Los niños utilizan tanto estrategias de modelamiento directo como estrategias de conteo. Es frecuente encontrar las siguientes estrategias de suma: contar todos, contar a partir del primer número, contar a partir del número mayor, añadir, contar a partir del número dado.

Nivel 3. Se caracteriza porque los niños usan un rango amplio de estrategias. Las estrategias de modelamiento directo prácticamente son desechadas y las de conteo son las que ocupan mayor espacio, aunque no se observa consistencia en el uso de una de ellas en particular. Los niños seleccionan la estrategia que sea más apropiada para cada caso en particular.

Nivel 4. En el último nivel los niños resuelven los problemas principalmente invocando estrategias de recuperación de hechos numéricos almacenados en la memoria. Los niños desde muy temprana edad aprenden de memoria ciertos hechos; por ejemplo, $0 + 1 = 1$, $0 + 3 = 3$, $2 + 2 = 4$. Estos hechos memorizados son evocados para resolver determinados problemas. El aprendizaje de hechos numéricos no ocurre en un momento particular del desarrollo ni en un contexto específico como la escuela; por el contrario, suelen aprenderse diversos hechos que varían en complejidad dependiendo del desarrollo intelectual y asimismo se aprenden en contextos muy variados. Cuando se alcanza el nivel 4 se supone que el niño tiene un repertorio de hechos numéricos que constituye la base para resolver un buen número de problemas (Fig. 2).

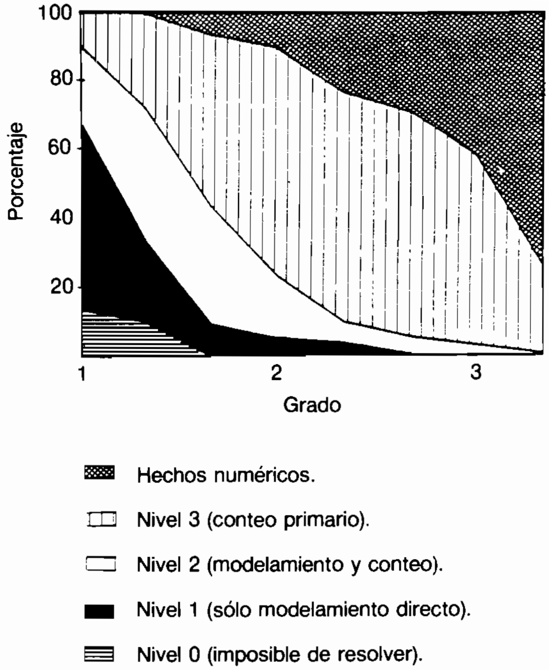

Figura 2. Niveles de ejecución para problemas de adición y problemas de cambio juntando no conocidos. (Tomado de Carpenter y Moser, 1984.)

Ashcraft y Battaglia (1978) han sugerido que los adultos usan el «acceso directo» a los problemas de hechos numéricos —la respuesta está almacenada en la memoria y se puede evocar directamente sin contar—. Según estos autores, sólo en el 5 por 100 de los problemas los adultos utilizan el procedimiento de contar porque falla el acceso directo a la información.

El acceso directo a los hechos numéricos almacenados en la memoria presenta problemas de espacio en la capacidad de la memoria a corto plazo. Una forma de extender la capacidad de esta memoria es desarrollando automaticidad de la respuesta. En la medida en que ciertos procesos se puedan realizar automáticamente, sin necesidad de prestarles atención directa, hay más espacio disponible en la memoria a corto plazo para los procesos que sí requieren atención. Para relacionar la automaticidad con el dominio del cálculo, es necesario distinguir entre dos tipos de tareas aritméticas en las que es común el ensayo y la práctica. Por una parte, están los llamados hechos numéricos, es decir, las combinaciones de números que conforman los bloques básicos de todos los cálculos y que son de cuatro tipos: suma, resta, multiplicación y división. Por otra parte, están los algoritmos o procedimientos de cálculo. Éstas son las secuencias de operaciones que se realizan utilizando los hechos numéricos para llegar a las soluciones de problemas más complejos.

La práctica puede lograr que los hechos numéricos se puedan evocar instantáneamente de la memoria a largo plazo permitiendo así que la memoria a corto plazo pueda funcionar más eficientemente. Lo mismo sucede para el acceso automático de procedimientos memorizados o algoritmos. Si una persona tiene que reconstruir el procedimiento sobre cómo cambiar fracciones a su menor denominador común cada vez que lo necesita, entonces el espacio disponible en la memoria a corto plazo es ocupado por procesos que podrían ser automáticos mediante una práctica apropiada. Así surge entonces la sugerencia de que al menos ciertas destrezas básicas de cálculo —hechos numéricos y algoritmos— necesitan desarrollarse hasta el punto de convertirse en procesos automáticos de manera que no compitan por el espacio en la memoria a corto plazo con procesos de alto nivel en la solución de problemas (Resnick y Ford, 1981).

Aplicación aritmética

Los problemas de aplicación aritmética son problemas que requieren una o más operaciones aritméticas, como, por ejemplo, «Ron tenía 7 manzanas. Sue tenía dos veces más manzanas que Ron. ¿Cuántas manzanas tenía Sue?»

Resolver este tipo de problema implica construir una representación de las palabras del problema y encontrar la solución utilizando las reglas de la aritmética y del álgebra. Una de las dificultades que presentan los sujetos en la ejecución de problemas del tipo verbal parece ser la representación del problema; es decir, moverse de las palabras en el problema a una representación mental coherente del mismo. Un subcomponente importante en el proceso de representación para problemas de tipo verbal es la traducción de cada oración.

Como ejemplo de este proceso, considérese la comprensión de proposiciones relacionales tales como «María tiene el doble de la edad de Betty». Greeno (1980), Riley, Greeno y Heller (1982) pidieron a niños de educación básica que escucharan y repitieran problemas de tipo verbal. Cuando el problema involucraba una proposición relacional, como por ejemplo, «Joe tiene tres canicas. Tom tiene cinco canicas más que Joe. ¿Cuántas canicas tiene Tom?», un error común era olvidar la información relacional y enunciar: «Joe tiene tres canicas. Tom tiene cinco canicas. ¿Cuántas canicas tiene Tom?»

Este tipo de confusión no se limita nada más a los niños de este nivel educativo. Soloway, Lochhead y Clement (1982) pidieron a estudiantes universitarios escribir ecuaciones para representar proposiciones relacionales tales como «Hay seis veces tantos estudiantes como profesores en esta universidad». Aproximadamente un tercio de los estudiantes produjo una ecuación incorrecta, tal como $6E = P$. Estudios subsiguientes revelaron que cuando se les pidió a los estudiantes utilizar programas de Basic para representar oraciones relacionales, el promedio de errores decreció notablemente.

Hay cierta evidencia que señala que la habilidad para traducir proposiciones relacionales incrementa con la edad, como lo evidencian los estudios de Riley y colaboradores (1982) y de Trabasso (1977).

Un segundo aspecto en la representación de problemas de tipo verbal es reconocer tipos de problemas. El estudio de Greeno (1980) señala que los niños aprenden a categorizar problemas en tipos, es decir, adquieren lo que se podría denominar esquemata para varios tipos de problemas. Este autor ha identificado tres tipos de problemas:

Problemas causa-cambio, tales como «Joe tiene tres canicas. Tom le da cinco canicas más. ¿Cuántas canicas tiene Joe ahora?».

Problemas de combinación, tales como «Joe tiene tres canicas. Tom tiene cinco canicas. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?».

Problemas de comparación, tales como «Joe tiene tres canicas. Tom tiene cinco canicas más que Joe. ¿Cuántas canicas tiene Tom?».

Como se puede observar, cada uno de estos problemas requiere la misma operación matemática: $3 + 5 = 8$. Sin embargo, la ejecución de los niños depende del tipo de problema. Greeno encontró que los niños de kinder y primer grado rindieron bien en algunos problemas de causa-cambio, pero no en problemas de comparación. Por el contrario, los niños de segundo y tercer grado rindieron bien en todos los problemas. Este patrón sugiere una tendencia evolutiva: los niños comienzan con la idea que todos los problemas son de causa-cambio, y posteriormente, aprenden a diferenciar diferentes tipos de problemas.

Hinsley, Hayes y Simon (1977) han encontrado que a medida que los estudiantes leen las primeras palabras de un problema, tienden a tomar una decisión en relación con el tipo de problema que es. En un estudio, estos autores pidieron a estudiantes universitarios clasificar un conjunto de problemas en categorías. Los resultados arrojaron dieciocho categorías tales como trabajo, movimiento, interés, triángulo, etc. Los sujetos pudieron realizar la tarea y mostraron niveles razonables de acuerdo. Así, hay evidencia que señala que los estudiantes tienen esquemas para problemas de tipo verbal.

Mayer (1981a) analizó los problemas de tipo verbal de varios textos de álgebra y encontró cien tipos de problemas básicos. Algunos tipos de problemas eran muy comunes (diez veces por mil problemas) mientras otros eran muy raros o poco frecuentes (una vez por mil problemas). En un estudio posterior, Mayer (1982b) pidió a los estudiantes leer y recordar una serie de problemas de tipo verbal. Los problemas de alta frecuencia se recordaron mucho mejor que los problemas de baja frecuencia.

Referencias

Ashcraft, M. H. y Battaglia, J. (1978). Cognitive arithmetic: Evidence for retrieval and decision processes in mental addition. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory, 4*, 527-538.

Ashcraft, M. H., Fierman, B. A. y Bartolotta, R. (1984). The production and verification tasks in mental addition: An empirical comparison. *Developmental Review, 4*, 157-170.

Carpenter, T. P. (1985). Learning to add and substract: An exercise in problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and substraction concepts in grades one through three. *Journal of Research in Mathematics Education, 15*, 170-202.

Chi, M. T. H., Feltovich, P. J. y Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science, 5*, 121-152.

Chi, M. T. H., Glaser, R. y Rees, E. (1981). Expertise in problem solving. En R. Sternberg (Ed.), *Advances in the Psychology of Human Intelligence*. Vol. 1. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Fuson, F. C. (1982). An analysis of the counting-on solution procedure in addition. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Substraction: A Cognitive Perspective*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Goldin, G. A. (1979). Structure variables in problem solving. En G. A. Goldin y C. E. McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving*. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

Greeno, J. (1980). Some examples of cognitive task analysis with instructional implications. En R. E. Snow, P. Federico y W. E. Montague (Eds.), *Aptitude, Learning and Instruction*. Vol. 1. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Groen, G. J. y Parkman, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review, 79*, 329-343.

Hinsley, D., Hayes, J. R. y Simon, H. (1977). From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems. En M. A. Just y P. A. Carpenter (Eds.), *Cognitive Processes in Comprehension*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Hudson, T. (1983). Correspondences and minimal differences between sets. *Child Development, 54*, 84-90.

Jerman, M. E. (1973). Indidualized instruction in problem solving in elementary school mathematics. *Journal for Research in Mathematics, 4*, 6-19.

Kantowski, M. G. (1978). The teaching experiments and soviet studies of problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Papers from a Research Workshop*. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

Kilpatrick, J. (1967). Analyzing the solution of word problems in mathematics: An exploratory study. (Tesis doctoral no publicada, Universidad de Stanford, California.) Dissertation Abstracts International, 1968, 28, 4380A. (University Microfilms, 68-5, 442).

Kintsch, W. (1987). Understanding word problems: Linguistic factors in problem solving. En M. Nagao (Ed.), *Language and Artificial Intelligence*. North Holland: Elsevier Science Publisher B.V.

Larkin, J., McDermott, P., Simon, D. P. y Simon, H. A. (1980). Expert and novice performance in solving physics problems. *Science, 208*, 1335-1542.

Lester, F. K. (1978). Mathematical problem solving in the elementary school: Some educational and psychological considerations. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Papers from a Research Workshop*. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem solving. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acqui-*

sition of Mathematics Concepts and Processes. New York: Academic Press.

Mayer, R. E. (1981a). Frequency norms and structural analysis of algebra story problems into families, categories and templates. *Instructional Science, 10*, 135-175.

Mayer, R. E. (1981b). *The Promise of Cognitive Psychology*. San Francisco: W.H. Freeman.

Mayer, R. E. (1982b). Memory for algebra story problems. *Journal of Educational Psychology, 74*, 199-216.

Mayer, R. E. (1986). Mathematics. En R. F. Dillon y R. J. Sternberg (Eds.), *Cognition and Instruction*. New York: Academic Press.

Moyer, R. S. y Landauer, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature, 215*, 1519-1520.

Parkman, J. M. y Groen, G. J. (1971). Temporal aspects of simple addition and comparison. *Journal of Experimental Psychology, 89*, 335-342.

Piaget, J. (1967). *La génesis del número en el niño*. Buenos Aires: Guadalupe.

Polya, G. (1965). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*. Vol. 2. New York: Wiley.

Resnick, L. B. y Ford, W. W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Restle, F. (1970). Speed of adding and comparing numbers. *Journal of Experimental Psychology, 83*, 274-278.

Riley, M. S., Greeno, J. G. y Heller, J. I. (1982). Development of children's problem solving ability in arithmetic. En H. Ginsburg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, N.J.: L.E.A.

Sekuler, R., Rubin, E. y Armstrong, R. (1971). Processing numerical information: A choice time analysis. *Journal of Experimental Psychology, 90*, 75-85.

Siegler, R. S. y Shrager, J. (1983). Strategy choices in addition: How children know what to do. Paper presented at the 18th Annual Carnegie Symposium on Cognition. Pittsburgh, P.A.

Soloway, E., Lochhead, J. y Clement, J. (1982). Does computer programming enhance problem solving ability? Some positive evidence on algebra word problems. En R. J. Seidel, R. E. Anderson y B. Hunter (Eds.), *Computer Literacy*. New York: Academic Press.

Steffe, L. P., Thompson, D. W. y Richard, J. (1982). Children's counting in arithmetical problem solving. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Substraction: A Cognitive Perspective*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Suppes, P. y Groen, G. J. (1967). Some counting models for first grade performance data on simple addition facts. En J. M. Scandura (Ed.), *Research in Mathematics Education*. Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics.

Thorndike, E. (1922). *The Psychology of Arithmetic*. New York: The MacMillan Company.

Trabasso, T. (1977). The role of memory as a system for making transitive inference. En R. V. Kail y J. W. Hagen (Eds.), *Perspectives on the Development of Memory and Cognition*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.