

EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL EN EXPERTOS Y NOVATOS: EL EFECTO DEL CONTENIDO¹

**ANGELES SANZ; JUAN IGNACIO POZO;
MARÍA DEL PUY PÉREZ ECHEVERRÍA;
MIGUEL ANGEL GÓMEZ CRESPO**
Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

Este artículo analiza los efectos de algunas de las variables más relevantes que influyen en las reglas empleadas por sujetos con diferente nivel instruccional en la solución de tareas proporcionales. Las variables estudiadas incluyen contenido y formato de la tarea, unidad de medida de las variables, nivel de dificultad computacional de los ítems, nivel de instrucción y desarrollo cognitivo de los sujetos que resuelven las tareas proporcionales. Diseñamos ocho tareas proporcionales, formadas por seis ítems con diferente nivel de dificultad computacional. Las tareas difieren en contenido (científico-vida cotidiana), concepto científico implicado (densidad, disolución y reacción química), formato de la tarea (análogo-proposicional) y unidad de medida (continua-discreta). La muestra utilizada estaba formada por cuatro grupos de adolescentes de octavo de EGB, segundo de BUP, COU letras y COU ciencias. Además había tres grupos de adultos universitarios en sus dos últimos años de carrera, psicólogos, químicos y matemáticos. Los resultados muestran un efecto principal de la dificultad computacional del ítem, concepto implicado y nivel de instrucción de los sujetos. Sin embargo, los efectos del contenido y formato de la tarea sólo son significativos para grupos e ítems específicos. Además, los sujetos con mayor nivel de instrucción emplean reglas diferentes dependiendo de las demandas específicas de la tarea.

Palabras clave: Razonamiento proporcional, Desarrollo cognitivo, Efecto del contenido, Experto-novato

Abstract

This paper analyzes the effects of some relevant variables on the rules used by subjects with different instructional level in proportional reasoning tasks solving. These variables include task format and content, measurement unit, item computational difficulty, level of instruction and cognitive development of the subjects that solve the tasks. We design eight proportional tasks composed by six items with different computational difficulty. The tasks differ in content (scientific or everyday), scientific concept implied (density, dissolution or chemical reaction), presentation format (analogical or propositional) and measurement unit (continuous- discrete). We present these tasks to the following seven groups: 14- and 16- years old adolescents, college preparatory students with and without scientific specialization, and three groups of university students from Mathematics, Chemistry and Psychology faculties. The results show a main effect of computational item difficulty, concept implied and level of instruction of subjects. However, the effects of content and format presentation are significant only for specific groups and items.

Key words: Proportional reasoning, cognitive development, effect of content, expert-novice

¹ Este trabajo ha sido posible gracias a la concesión de una Ayuda del C.I.D.E. y del C.I.C.Y.T. PB90-0211 a un Proyecto de Investigación dirigido por el segundo autor.

1. Introducción

En la última década, en psicología, ha habido una tendencia cada vez mayor a considerar la especificidad del conocimiento. Quizás, una de las áreas en las que más claramente puede observarse esta tendencia es en los estudios sobre las diferencias entre expertos y novatos en dominios de conocimiento específicos.

En estos estudios se parte del supuesto de que las diferencias entre expertos y novatos se deben básicamente a sus distintas bases de conocimiento tanto conceptuales como procedimentales. Asimismo se parte del supuesto de que la pericia está ligada a áreas específicas de conocimiento. De hecho existe escasa evidencia de que las habilidades que posee un experto puedan ser transferibles a otro dominio de conocimiento distinto del que es experto (Chi, 1988).

Una excepción podría constituirla el experto en el área de matemáticas. De hecho, tradicionalmente se ha considerado a las matemáticas como un conjunto de procedimientos *generales* o herramientas de uso general (Defior, 1990), aplicables a distintos contenidos. Sin embargo, existen investigaciones que muestran que cuando usamos el conocimiento matemático para la comprensión y aprendizaje de otras ciencias y en la vida cotidiana, influye el contenido (Mayer, 1985; Pérez Echeverría, en prensa).

El razonamiento proporcional es un contenido matemático básico en el curriculum de enseñanza primaria y secundaria, aplicable en distintas áreas de conocimiento como, por ejemplo, la química. Sin embargo, el efecto del contenido en el razonamiento proporcional ha sido escasamente estudiado.

El primer estudio sistemático sobre razonamiento proporcional fue el realizado por la Escuela de Ginebra (Inhelder y Piaget, 1955). Según estos autores, el razonamiento proporcional es uno de los ocho esquemas formales que se alcanza durante la adolescencia, formando parte de una estructura cognitiva *general*. De tal modo, que una vez alcanzado, el sujeto estaría capacitado para resolver cualquier tarea proporcional independientemente del contenido. En otras palabras, desde la teoría piagetiana del Pensamiento Formal las reglas proporcionales son habilidades generales independientes del contenido específico al que se aplican.

Sin embargo, los datos actuales sobre proporción muestran que no es un patrón de razonamiento unitario. Así, los primeros estudios sobre tareas proporcionales en los que se extendían y replicaban los trabajos piagetianos (Lovell, 1961; Lovell y Butterworth, 1966) mostraron que no más del 50% de los sujetos adolescentes y adultos resolvían correctamente los problemas proporcionales. Recientemente, algunos autores (véase Tourniaire y Pulos, 1985) han puesto de manifiesto la importancia de tener en cuenta variables tanto de la tarea como del sujeto.

Algunas de las variables estudiadas han sido *el desarrollo cognitivo de los sujetos* (Noelting, 1980 a, b; 1981). Este autor mantiene al igual que Inhelder y Piaget (1955) una teoría del desarrollo basada en estadios, aunque acercándose a los análisis procesuales de la psicología cognitiva contemporánea (Case, 1985). En sus estudios clasificó por orden de dificultad, problemas proporcionales con diferente contenido numérico, estableciendo diferentes estadios y las edades a las que los sujetos accedían a tales estadios. Previamente a la presentación de la tarea realizó un análisis teórico de las reglas necesarias para resolver cada uno de los problemas, similar a la evaluación de reglas utilizada por Siegler en sus trabajos sobre la tarea del equilibrio de la balanza (Siegler, 1976; 1978).

Noelting encontró que problemas de un mismo estadio se resuelven a edades diferentes, dando lugar a desfases horizontales. Parece, por tanto, que el desarrollo cognitivo de los sujetos no es suficiente para explicar por qué se producen estos desfases horizontales.

Por otra parte, diversos estudios han puesto de manifiesto la influencia en la resolución de problemas proporcionales de *la relación numérica de las fracciones o dificultad computacional*

de los ítems (Karplus, Pulos y Stage, 1980; 1983a y 1983b). Estos autores con una muestra de sujetos de edades comprendidas entre los 12 y 14 años encontraron que las tareas más fáciles son aquellas en las que o bien están relacionados los primeros o los segundos términos de cada fracción y además existe una relación de divisibilidad o bien hay únicamente una relación de divisibilidad entre sus términos (por ejemplo, $2/6$ vs $8/24$, $3/12$ vs $5/20$).

Del mismo modo, encontraron que las tareas en las que no había relaciones de equivalencia entre los términos de las fracciones ni tampoco relaciones de divisibilidad dificultaba la tarea (Karplus, Pulos y Stage, 1983a).

En resumen, estos estudios muestran que cuando la dificultad de cómputo aumenta, el porcentaje de respuestas correctas disminuye. Sin embargo, desconocemos hasta qué punto los sujetos adaptan las reglas de cómputo al nivel de dificultad de los ítems. Asimismo desconocemos si esta adaptación es mayor o no en los sujetos con mayor nivel de instrucción.

El formato en el que se presenta la tarea también influye en el rendimiento sobre tareas proporcionales (véase para una revisión Tourniaire y Pulos, 1985). La mayoría de los trabajos que estudian esta variable se han centrado en el rendimiento de los sujetos ante tareas manipulativas vs no manipulativas. Sin embargo, el estudio más cercano a uno de los objetivos de nuestra investigación es el realizado por Neshet y Sukenik (1991). Este estudio estaba formado por dos fases, en el que presentaron dos recipientes, a sujetos de séptimo, octavo y noveno grado, en una tarea proporcional formada por siete ítems. En cada recipiente se echaba un número determinado de gotas de color azul y de color amarillo, obteniendo diferentes tonalidades de color verde según la cantidad de gotas azules y amarillas que se hubieran echado en cada recipiente (tarea analógica). En una primera fase del estudio la tarea de los sujetos consistía en predecir si la tonalidad del verde de las dos mezclas era igual o diferente. Una vez hecho esto, se les daba feedback sobre su respuesta llevando a cabo en presencia de los sujetos las dos mezclas. Después de realizar esta tarea, en una segunda fase del experimento, a los sujetos se les presentó dos ítems sobre la misma tarea pero esta vez la presentación fue proposicional o matemática. Los resultados muestran que el rendimiento de los sujetos mejoraba en esta segunda fase, en la que el formato es proposicional.

Sin embargo, este estudio presenta dos problemas. En primer lugar, no utilizaron un grupo control por lo que pudo ocurrir que las mejoras significativas, cuando la tarea se presentó con un formato proposicional, se debieran a efectos de aprendizaje. Y en segundo lugar, los ítems de las dos tareas no tienen el mismo grado de dificultad. Mientras que en la tarea presentada de forma proposicional, las relaciones entre las dos fracciones son de equivalencia, en la tarea presentada de forma analógica hay algún ítem en que no existen relaciones de ningún tipo entre las fracciones. Por lo que no queda claro si influye o no la presentación analógica frente a la proposicional.

Otra variable que se ha demostrado que influye es *la familiaridad con el contenido de la tarea*. Parece que, en general, los contenidos familiares hacen más fáciles la resolución de las tareas proporcionales. De este modo, Tourniaire (1986) con una muestra de sujetos de enseñanza primaria (tercero, cuarto y quinto de EGB) mostró que los resultados variaban desde un 70% de aciertos en problemas familiares a un 37% en problemas no familiares. A este mismo resultado llegaron Saunders y Jesunathadas (1988) con sujetos pertenecientes a enseñanza secundaria (noveno grado), pero encontraron que la familiaridad con el contenido de la tarea mejoraba el rendimiento sólo en los ítems más fáciles.

A partir de estos trabajos podemos afirmar que la familiaridad con el contenido mejora el rendimiento en sujetos de enseñanza primaria (tercero, cuarto y quinto de EGB). También se produce una mejora en enseñanza secundaria (noveno grado) pero sólo para ciertos ítems, aquellos que tienen una dificultad menor. Sin embargo, desconocemos qué influencia tiene esta variable en sujetos con un grado de instrucción mayor.

Tampoco hay ningún trabajo que estudie la influencia del contenido en problemas proporcionales comparando tareas de diversos dominios de conocimiento. Ni existen estudios que comparen diferentes conceptos dentro de un mismo dominio de conocimiento, a pesar de que estos trabajos podrían ser de gran utilidad para determinar el grado de especificidad del razonamiento proporcional.

Por otra parte, diversos estudios han puesto de manifiesto la influencia en la solución de problemas proporcionales de la *magnitud con la que se miden las variables*. Así, se han encontrado diferencias en función de la unidad de medida (continua-discreta. Horowitz (1981, citado por Tourniaire y Pulos, 1985) sugiere que las personas tenemos más facilidad en representarnos unidades discretas que continuas. Sin embargo, esta variable no ha sido estudiada para grupos que varían en función del grado de pericia con el contenido de la tarea.

La edad y/o el grado de instrucción de los sujetos también se ha demostrado que influye. Así en la revisión llevada a cabo por Tourniaire y Pulos (1985) encontraron que el rendimiento de los sujetos mejoraba con la edad y/o el nivel de instrucción. Los estudios de Karplus, Pulos y Stage (1983a) y de Neshet y Sukenik (1991), apuntan en la misma dirección: los sujetos con un mayor grado de instrucción utilizan reglas más correctas. No obstante, la mayoría de los trabajos se caracterizan por utilizar muestras de sujetos de educación primaria y secundaria.

Además, aun conociendo que la instrucción en este contenido matemático mejora el rendimiento de los sujetos, desconocemos qué ocurre cuando los sujetos difieren no tanto en la instrucción matemática recibida como en el grado de pericia respecto al contenido específico sobre el que se aplica el razonamiento proporcional.

En general, los estudios comentados coinciden en señalar la gran dificultad de los adolescentes y adultos para resolver correctamente problemas de proporción, incluso tareas con razones simples. De hecho, una tendencia general entre los sujetos que resuelven tareas proporcionales es utilizar reglas no cuantitativas o reglas cuantitativas parcialmente correctas. Así, en la literatura sobre razonamiento proporcional se han descrito ampliamente distintas reglas. La regla menos elaborada encontrada en estos estudios es la *cualitativa*, que consiste en ignorar parte de los datos del problema, comparando entre magnitudes absolutas. No se establece, por tanto, ningún cálculo numérico. Esta regla es propia según Inhelder y Piaget (1955), de los niños preoperacionales. Sin embargo, es utilizada con frecuencia por los adolescentes (Duncan y Johnstone, 1973; Karplus, Pulos y Stage, 1980, 1983a, 1983b). Por ejemplo, se ha encontrado que los adolescentes la utilizan a la hora de evaluar y comparar concentraciones en disoluciones, de tal forma que se fijan en una de las dos variables, o bien en la cantidad de sustancia o bien en el volumen, en vez de en el valor numérico de la concentración.

Otra regla utilizada es la *aditiva*, más compleja que la anterior pero que conduce a errores matemáticos con mucha frecuencia. Esta regla consiste en comparar los miembros de las fracciones mediante sumas y restas. Es propia de los niños de las operaciones concretas (Inhelder y Piaget, 1955) pero al igual que la anterior es utilizada ampliamente por adolescentes (Karplus y Karplus, 1972; Karplus y Peterson, 1970) sobre todo en los problemas más difíciles.

La regla de *correspondencia o construcción* ha sido ampliamente descrita por la literatura. Supone establecer una regla de proporción en una razón y aplicarla a la otra razón. Con el uso de esta regla se llega a una solución correcta si están relacionados los primeros o segundos términos de cada fracción y/o existe entre los mismos una relación de divisibilidad. Tourniaire (1986) encontró que esta regla fue utilizada por el 30% de niños de Enseñanza Primaria (grados 3, 4 y 5).

Por último, la regla más correcta es la *multiplicativa*, que supone el conocimiento de la relación de igualdad entre dos razones, por tanto exige conocer que un cambio en un miembro de la proporción se puede compensar con un cambio en el otro miembro sin que cambie la igualdad entre las dos razones.

2. Objetivos

En esta investigación intentamos analizar los efectos de las variables arriba señaladas sobre las reglas empleadas por los sujetos con diferente nivel instruccional en la solución de tareas proporcionales. Elegimos contenidos químicos porque la mayoría de los cálculos químicos en enseñanza secundaria se pueden realizar mediante relaciones de proporcionalidad.

Las variables estudiadas en concreto fueron, en primer lugar, el efecto del contenido de la tarea en el rendimiento de tareas proporcionales.

En otras palabras, se trataba de determinar si los problemas detectados en la solución de tareas proporcionales se debían a problemas relacionados con el conocimiento de los conceptos físico-químicos implicados, es decir, si podemos considerar el razonamiento proporcional como habilidades específicas bien de dominios de conocimiento determinadas (en nuestro estudio comparamos el dominio químico con el físico) o bien de los conceptos científicos implicados, independientemente del dominio al que pertenezcan. O por el contrario, estas habilidades son generales y, por lo tanto, el contenido al que se apliquen no influye en el rendimiento de los sujetos.

Asimismo tratamos de comprobar cómo podía afectar el presentar la tarea en contextos cotidianos (frente a contextos científicos) en el rendimiento de los sujetos. Respecto a este último aspecto suponíamos que, por su relación con los estudios que analizan la influencia de la familiaridad del contenido de la tarea, el rendimiento de los sujetos en esta tarea mejoraría, al menos en los de menor nivel de instrucción y en items con menor nivel de dificultad computacional.

Además estábamos interesados en analizar de qué manera influye en el rendimiento de los sujetos la presentación de la tarea en diferentes formatos (analógica/proposicional) y si afecta de modo similar a los sujetos adolescentes y a los sujetos adultos, especialistas en diversas áreas de conocimiento. Ya que algunos autores (véase Pozo, Gómez Crespo, Limón y Sanz, 1991) han sugerido que uno de los factores que subyacen a los problemas que los alumnos tienen en la comprensión de la química es el de las dificultades en la representación de lo no observable.

Esperábamos que se beneficiarían del formato analógico los grupos con menor nivel de instrucción, mientras que los sujetos más mayores rendirían con los dos formatos de manera similar.

Igualmente pretendíamos comprobar si los diferentes niveles de dificultad computacional establecidos se ven refrendados empíricamente así como el grado de adaptación de las reglas de los sujetos a estos niveles de dificultad. Estos aspectos son sumamente interesantes tanto desde el punto de vista educativo (pues de confirmarse, servirían en la práctica para secuenciar la enseñanza del razonamiento proporcional) como desde el punto de vista psicológico (nos mostraría el nivel de flexibilidad del sistema cognitivo humano en el uso del razonamiento proporcional).

Estábamos interesados también en examinar la relación entre las concepciones previas de los sujetos sobre la naturaleza de la materia (continua-discontinua) y las diferentes reglas que tanto novatos como expertos emplean para resolver problemas proporcionales. Para ello, diseñamos dos cuestionarios sobre reacciones químicas en los que las unidades de medida variaban: unidades continuas (gramos) y unidades discretas (partículas). Supusimos que los grupos con mayor conocimiento químico, es decir, COU ciencias y el grupo de estudiantes universitarios químicos, discriminarían entre estas dos tareas. Así, cabía esperar diferencias fundamentalmente en los items de mayor nivel de dificultad, en los que se esperaba que estos dos grupos utilizaran reglas multiplicativas para resolver los problemas con unidades continuas (ya que las unidades se pueden dividir) y reglas de correspondencia para resolver las tareas con unidades discretas.

Por último, examinaremos las diferencias de carácter grupal (adolescente/adulto y experto/novato). En estos problemas los sujetos pueden diferir en su pericia en matemáticas y en el dominio específico en que se presentan las tareas (en este estudio, química).

3. Método

3.1. Sujetos

Los criterios para la selección de la muestra se basaron en el nivel de instrucción y/o edad de los sujetos y su especialización científica. La muestra utilizada estaba formada por 140 sujetos, pertenecientes a siete grupos diferentes, cada grupo estaba constituido por 20 sujetos. Cuatro grupos correspondían a adolescentes de diferentes niveles de edad e instrucción - octavo de E.G.B. (8ºE), con una edad media de 13 años y 7 meses; segundo de B.U.P. (2ºB), de 15 años y 8 meses de edad; C.O.U. de letras puras, es decir, sin matemáticas (C.O.U. L), de 18 años y 4 meses de edad; C.O.U. de ciencias con la asignatura de química (C.O.U. C), de 17 años y 9 meses de edad y los otros tres grupos estaban formados por adultos universitarios en los dos últimos años de la carrera. Estos tres grupos estaban formados por un grupo de estudiantes de matemáticas (EM), de 23 años y 4 meses de edad; otro grupo de estudiantes de química (EQ), de 22 años y nueve meses de edad; y otro de estudiantes de psicología (EP), de 23 años y 5 meses de edad (estos tres grupos tenían formación matemática aunque diferían en su conocimiento del contenido químico).

3.2. Descripción de las pruebas

Se diseñaron ocho cuestionarios. Cada uno de ellos estaba formado por seis ítems. Estos, se construyeron según tres niveles de dificultad computacional. Del primer nivel de dificultad o dificultad menor se diseñó un ítem. Este nivel podía ser resuelto correctamente mediante reglas aditivas, de correspondencia y multiplicativas. El segundo nivel de dificultad estaba constituido por dos ítems que podían resolverse correctamente mediante reglas de correspondencia o reglas multiplicativas. Y por último, el tercer nivel, que se correspondía con el de dificultad mayor, estaba constituido por tres ítems que sólo podían resolverse de forma correcta mediante reglas multiplicativas. Los ítems diseñados se pueden ver en la tabla 1.

De los ocho cuestionarios siete eran de dominio químico y uno era de dominio físico. Como puede observarse en la tabla 1, dentro del dominio químico había tres tareas de disoluciones y cuatro de reacciones. De los cuestionarios de disoluciones, uno se presentó con formato analógico y dos con formato matemático o proposicional. En las tareas con formato matemático se trataba, en un caso, de mezclar o disolver un compuesto químico, cloruro sódico en agua, y, en otro caso, de disolver dos elementos familiares, cacao en leche. Se planteó a los sujetos una serie de problemas en los que dos estudiantes de química tenían que determinar la concentración de cloruro sódico en agua o la concentración de cacao en leche -dependiendo del cuestionario-. Uno de los estudiantes disponía del recipiente A y el otro del recipiente B. La labor de los sujetos consistía en ayudar a estos estudiantes a tomar una decisión sobre cuál de los dos recipientes estaba más concentrado, así como determinar cuánto tenían que añadir o bien de soluto o bien de disolvente en caso de que no tuvieran la misma concentración. Tenían tres posibles respuestas, que el recipiente A estuviera más concentrado, que lo estuviera el recipiente B o que los dos recipientes estuvieran igual de concentrados.

En el cuestionario de disoluciones con formato analógico, se presentaba un dibujo con dos jarras, la de la izquierda correspondía al estudiante A y la de la derecha correspondía al

estudiante B. Asimismo en el lado izquierdo de cada jarra, los gramos de cloruro sódico venían representados por cuadrados. Cada cuadrado se correspondía con un gramo de este compuesto. En el lado derecho de cada dibujo estaba representada el agua. Cada litro de agua venía representado por un vaso.

TABLA 1.- Diseño de los ítems de cada cuestionario

DOMINIOS DE CONTENIDO		NIVEL DE DIFICULTAD	ITEMS	REGLAS
FISICO		1	4/3 vs 4/6	ADITIVA
		2	4/5 vs 6/7	CORRESPONDENCIA
			2/4 vs 6/8	CORRESPONDENCIA
		3	2/4 vs 5/9	MULTIPLICATIVA
			2/3 vs 5/7	MULTIPLICATIVA
			3/4 vs 7/9	MULTIPLICATIVA
QUI MI CO	DISOLUCIONES	1	5/4 vs 2/4	ADITIVA
		2	4/8 vs 2/4	CORRESPONDENCIA
			6/8 vs 3/5	CORRESPONDENCIA
		3	7/2 vs 8/3	MULTIPLICATIVA
			8/7 vs 3/2	MULTIPLICATIVA
		4/9 vs 3/7	MULTIPLICATIVA	
	REACCIONES	1	3/2 vs 5/2	ADITIVA
		2	4/3 vs 8/7	CORRESPONDENCIA
			2/4 vs 5/8	CORRESPONDENCIA
		3	3/2 vs 7/5	MULTIPLICATIVA
			3/4 vs 7/9	MULTIPLICATIVA
		2/3 vs 5/8	MULTIPLICATIVA	

Por otro lado, el diseño de las tareas de reacciones estaba basado en la ley de las proporciones definidas ya que parte de los errores cometidos en los cálculos con reacciones se deben a la escasa comprensión de esta ley (Yarroch, 1985): "Cuando dos o más compuestos se combinan para formar un compuesto dado, la razón entre las masas de los elementos que intervienen es siempre la misma". El hecho de que se basaran en esta ley impidió igualar el modo de presentación o el ambiente de la tarea respecto de las pruebas de disoluciones y densidad (como se podrá observar cuando sean descritas).

Los cuatro cuestionarios de reacciones estaban formados por tres tareas presentadas con formato proposicional y una tarea presentada con formato analógico. De las tres tareas con formato matemático, dos eran idénticas excepto por el tipo de unidades con las que se trabajaba: en una tarea con unidades continuas (gramos), y en la otra tarea con unidades discretas (partículas).

Concretamente, la tarea de reacciones que se planteó a los sujetos (con unidades continuas) fue el caso de un científico químico que estaba haciendo varios experimentos en el laboratorio con dos elementos químicos, uno conocido, el Manganeseo, y otro elemento que había descubierto el propio científico, el Esferio. Para hacer estos experimentos el científico disponía de distintas unidades de Manganeseo y Esferio. Al mismo tiempo se les decía que estos elementos reaccionaban según ciertas proporciones sin que sobrara ni faltara nada para producir Esferuro de Manganeseo.

La tarea de los sujetos consistía en ayudar a este científico a tomar una decisión sobre si sobraba de alguno de los dos elementos, de los dos, o no sobraba ni faltaba nada para formar Esferuro de Manganeseo; en caso de que sobrara, los sujetos tenían que decir cuánto. Pongamos uno de los problemas que sirvió como ejemplo para que quede más clara la tarea:

$2E + Mn \rightarrow E_2Mn$ (2 gramos de Esferio reaccionan completamente con 1 gramo de Manganeseo, es decir que no falta nada ni sobra nada para producir Esferuro de Manganeseo). Al mismo tiempo las cantidades de las que dispone el científico son las siguientes:

Esferio: tiene 5 gramos de Esferio.

Manganeseo: tiene 1 gramo de Manganeseo.

Las posibles respuestas fueron:

- A. Sobra Esferio.
- B. Sobra Manganeseo.
- C. Sobra de los dos.
- D. No sobra de ninguno de los dos.

La otra tarea de reacciones, también con formato proposicional, trataba de un ama de casa a la que habían dado varias recetas para hacer tartas diferentes. En tales recetas a los sujetos se les decía que esta ama de casa necesitaba entre otras cosas, fruta -en cada caso se trataba de una fruta diferente- y azúcar. Disponía de ciertas cantidades de estos dos ingredientes para hacer tanta cantidad de tarta como se lo permitieran sus ingredientes. La tarea de los sujetos consistía en decidir si sobraba de alguno de los elementos, de los dos o no sobraba nada. Si sobraba, debían decir cuánto y cómo habían llegado a esa conclusión.

El cuestionario de reacciones con formato analógico, era similar a la tarea de reacciones con unidades discretas, en lo único que se diferenciaban era en el formato. Las partículas de Esferio estaban representadas por círculos y las de Manganeseo por cruces. En la parte izquierda se representaba tal y como reaccionaban los elementos de forma ajustada y en la parte de la derecha las cantidades de las que disponía el científico. Las posibles respuestas eran las mismas que en el resto de los cuestionarios de reacciones. También se pedía a los sujetos que dijeran si sobraba o no de algo, y cómo habían llegado a esa conclusión.

Dentro del dominio físico, el concepto con el que se trabajó fue el de densidad. La tarea que se planteó a los sujetos fue el caso de un estudiante de física que trabajaba con dos líquidos A y B. De estos dos líquidos los sujetos tenían que tomar una decisión sobre qué líquido era más denso. Para ello se les daba la masa o peso de los líquidos y el volumen o espacio que ocupaban. Además, si las densidades de los líquidos no eran iguales debían añadir uno de los dos componentes (masa o volumen) para igualarlas. Se les dió tres opciones de respuesta: que el líquido A fuera más denso, que lo fuera el B o que los dos fueran igual de densos.

3.3. Diseño y Procedimiento

Se utilizó un diseño factorial $7 \times 8 \times 3$, siendo el primer factor intergrupo y los otros dos intragrupos. Utilizamos siete grupos: Octavo de EGB, Segundo de BUP, COU de letras, COU

de ciencias, grupo de matemáticos, grupo de químicos y grupo de psicólogos; ocho *contenidos*: densidad, disoluciones formato matemático, disoluciones con formato analógico, disoluciones vida cotidiana, reacciones con unidades discontinuas, reacciones con unidades continuas, reacciones con formato analógico y reacciones vida cotidiana; y tres *niveles de dificultad computacional de los ítems*: baja, media y alta).

Los ocho cuestionarios fueron resueltos por los diferentes grupos en tres sesiones. Se hizo así para que los sujetos no acusaran la fatiga. Las pruebas se hicieron en grupo en un aula de clase. Antes de entregarles el primer cuestionario se les explicó la tarea que iban a realizar. Se les dijo que formaba parte de un estudio psicológico sobre la comprensión de la química. También se les dijo que todos aquellos alumnos que desearan conocer con más profundidad el sentido de las pruebas que iban a realizar, recibirían una explicación al término de las mismas.

El experimentador leyó en voz alta las instrucciones. En ellas se aclaraba que tenían todo el tiempo que necesitaran para realizar la tarea y que preguntaran en caso de tener dudas. Al mismo tiempo se les presentó un problema que servía como ejemplo y que resolvieron en grupo.

Se les dijo que tan importante como resolver el problema era justificar por qué se había hecho así. No pasaron a resolver el cuestionario hasta que todos los sujetos afirmaban que habían entendido el problema. En cada cuestionario se contrabalanceó el orden de los ítems. Asimismo se contrabalanceó el orden en el que se pasaban los cuestionarios. El tiempo que tardaron en resolver cada una de las tareas varió desde veinte a veinticinco minutos en los alumnos más pequeños hasta ocho minutos en los alumnos más mayores.

3.4. Criterios de análisis

En el análisis de los datos establecimos dos criterios: *el número de aciertos* (la corrección de las respuestas fue realizada desde el punto de vista matemático) y *el tipo de reglas utilizadas* por cada grupo de sujetos. Las respuestas correctas fueron analizadas mediante un ANOVA. Las reglas fueron analizadas cualitativamente. Previamente a la realización de la tarea realizamos un análisis teórico de las reglas necesarias para resolver cada uno de los problemas. Las dificultades de este análisis se centraron, fundamentalmente, en los problemas de dificultad computacional baja y media pues podían resolverse correctamente por más de una regla. Por esta razón, en estos problemas se hizo uso de las justificaciones de las respuestas por parte de los sujetos pero única y exclusivamente en aquellos casos en los que la justificación era lo suficiente precisa e incluía los pasos dados. En caso contrario la regla usada no podía determinarse. La evaluación del tipo de reglas utilizadas por los sujetos fue llevada a cabo por dos personas de forma independiente. El índice de acuerdo interjueces fue de 0.97. Los casos en que hubo discrepancia se discutieron hasta llegar a un acuerdo.

4. Resultados

4.1. Resultados según contenidos

Un ANOVA deparó un efecto principal significativo de esta variable $F(7,931) = 41,859$ ($p < 0.001$). En la figura 1 se puede ver la media de aciertos en las diferentes tareas. Como puede observarse y según la prueba de Scheffé se rinde significativamente menos en las tareas de reacciones que en las de disoluciones y densidad ($p < 0.001$). Por tanto, podemos afirmar que lo que afecta realmente al rendimiento de los sujetos no es que la tarea pertenezca a dominios de conocimiento diferentes (física-química) sino a los conceptos específicos implicados.

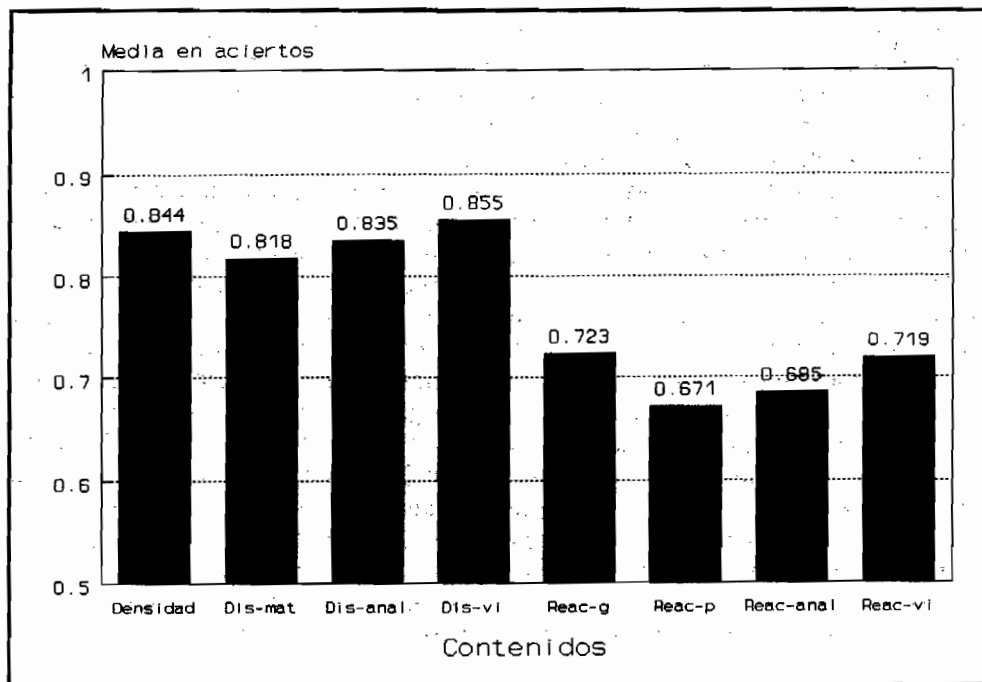


FIGURA 1.- Media de respuesta correctas para cada contenido

Asimismo, se puede observar que, en general, los contenidos de vida cotidiana así como el formato de la tarea mejoran el rendimiento de los sujetos tanto en las tareas de disoluciones como en las tareas de reacciones aunque las diferencias no son estadísticamente significativas. Pero sí lo son para grupos e ítems específicos $F(84,1862)=2,847$ ($p<0.001$). Concretamente, los sujetos con menor nivel de instrucción, es decir, octavo de EGB, rendían más en tareas con contenido cercano a la vida cotidiana pero sólo en tareas de reacciones de dificultad computacional media $p<0.05$.

Por otro lado, el rendimiento fue mayor para tareas con formato analógico aunque las diferencias fueron sólo significativas para octavo de EGB en tareas de reacciones de dificultad computacional media $p<0.05$. Si analizamos los porcentajes de reglas utilizadas según los contenidos observamos que (tabla 2), en las tareas de reacciones, se han empleado fundamentalmente reglas por correspondencia, aproximadamente en un 50%; en cambio la regla multiplicativa ha sido utilizada escasamente, alrededor del 10%, mientras que en los otros dos contenidos, disoluciones y densidad, la regla de correspondencia se ha utilizado como mucho en un 6'6% y la regla multiplicativa más del 39%.

La mejora del grupo de octavo de EGB en tareas de reacciones con contenido cercano a la vida cotidiana y formato analógico se refleja, a nivel cualitativo, en el uso de reglas más correctas en el nivel de dificultad medio. Concretamente el porcentaje aumenta desde el 53% (en tareas de reacciones en un contexto científico y con formato matemático) al 90% en tareas cercanas a la vida cotidiana y formato analógico.

Por otro lado, contrariamente a lo esperado, los grupos de COU Ciencias y los estudiantes de química no discriminan en el nivel de dificultad computacional alto las tareas con unidades discretas de las continuas como tampoco lo hacen el resto de los grupos (aunque este resultado era el esperable ya que estos grupos tienen un menor conocimiento de la química). Estos datos

suponen, en principio, que en estas tareas los conocimientos sobre la naturaleza de la materia que poseen los sujetos no influye en el rendimiento sobre tareas proporcionales.

TABLA 2.- Porcentaje de reglas para cada contenido

	Dens	D-mat	D-an	D-vi	R-g	R-p	R-an	R-vi
R. Aditiva	27.9	39.4	32.6	42.3	34.1	35.1	32.9	31.8
R. Corresp.	5.1	6.5	6.6	6.5	50.3	49	54.7	51.7
R. Multipl.	58.4	40.5	45.5	39.1	13.3	11	8.3	12.1
Sin determ.	8.6	13.6	15.3	12.1	2.3	4.9	4.1	4.4

4.2. Resultados según el nivel de dificultad computacional

La dificultad computacional también posee un efecto significativo $F(2,266) = 657,134$ ($p < 0.001$). Los items de nivel de dificultad menor se resuelven casi perfectamente, (97,2%), en los de dificultad media el rendimiento también es muy alto (86,8%) y en los items de dificultad más elevada el rendimiento no alcanza el 50%. Se confirman empíricamente, por tanto, los niveles de dificultad teórica que habíamos establecido. Las diferencias entre todos los niveles son significativas ($p < 0.001$). Este resultado se ve reflejado en el tipo de reglas utilizadas según el nivel de dificultad computacional (ver tabla 3). Así, en el nivel de dificultad bajo la regla más empleada fue la aditiva, (84'7%). En el nivel de dificultad medio, la de correspondencia, (45%). Y en el nivel de dificultad alto, la regla multiplicativa (44'7%). Estos datos reflejan la adaptación o flexibilidad de los sujetos a la demanda de la tarea cumpliendo, por tanto, con una de las reglas cardinales de solución de problemas: "nunca usar técnicas difíciles antes de evaluar si existen técnicas más fáciles para resolver el problema correctamente (Shoenfeld, 1987, pág 195). Aunque no todos los grupos se comportan de modo similar bajo los tres niveles de dificultad $F(12,266)=8,674$ ($p < 0.001$). Así, los grupos de octavo de EGB y COU letras rinden significativamente menos en tareas de dificultad alta que en tareas de dificultad media y baja $p < 0.05$. Asimismo el rendimiento en tareas de dificultad media es menor que en tareas de dificultad baja $p < 0.05$. Pero el resto de los grupos -segundo de BUP, COU ciencias y los tres grupos de adultos universitarios se comporta de forma similar bajo dificultad baja y media.

TABLA 3.- Porcentaje de reglas para cada nivel de dificultad computacional

	Nivel bajo	Nivel medio	Nivel alto
R. Aditiva	84.7	10.1	14
R. Corresp.	1	45	37
R. Multipl.	8.3	30.6	44.7
Sin determ.	6	14.3	4.3

El análisis cualitativo de los datos muestra que los grupos que no discriminan entre los niveles de dificultad computacional bajo y medio, a diferencia del resto de los grupos, emplean en el *nivel medio* un porcentaje mayor de reglas aditivas, el 30% octavo de EGB frente al grupo de matemáticas que no las utiliza. Y un menor porcentaje de reglas multiplicativas, el 18'5% octavo de EGB frente al grupo de matemáticos, el 52'5%.

Asimismo, el grado de flexibilidad en el empleo de las diferentes reglas varía en función del nivel de instrucción $F(12,266)=8,674$ ($p<0.001$). Hemos podido observar que, en los ítems de mayor nivel de dificultad, los grupos con menor instrucción utilizan un porcentaje menor de reglas multiplicativas. Por ejemplo, octavo de EGB emplea el 18'5% a diferencia del grupo de químicos que emplea el 60'75%. Asimismo en los niveles de dificultad intermedia (en los que para resolverlos correctamente bastaría utilizar reglas de correspondencia) el grupo de octavo de EGB resuelve las tareas mediante reglas de correspondencia el 42'3% de las veces, mientras que el grupo de estudiantes de matemáticas lo hace el 56'6%.

4.3. Resultados por grupos

La figura 2 muestra los resultados por grupos. El análisis de varianza reveló la presencia de diferencias significativas entre los diferentes grupos $F(6,133) = 21,117$ ($p<0.001$). Puede observarse que todos los grupos superan el 50% de aciertos.

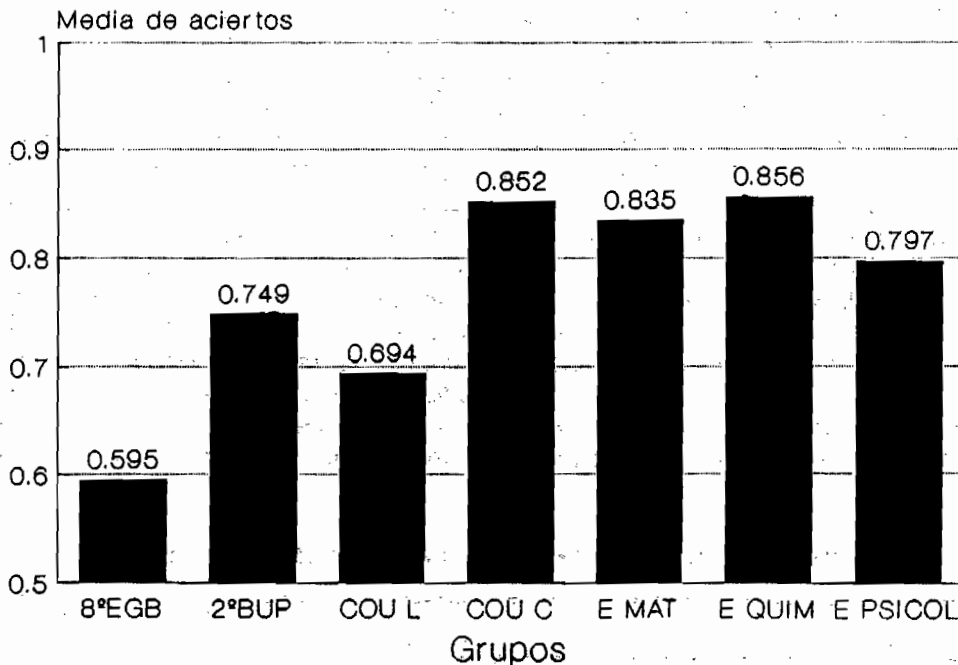


FIGURA 2.- Media de aciertos para cada grupo

Este rendimiento es muy elevado, pero puede entenderse si tenemos en cuenta que la tarea incluye ítems de varios niveles de dificultad. Existen claras diferencias entre los grupos incluidos en la muestra, las diferencias encontradas pueden observarse en la tabla 4.

TABLA 4.- Diferencias encontradas entre los diferentes grupos de la muestra

	8°EGB	2°BUP	COU L	COU C	E.M	E.Q	E.P
8°EGB		p<0.001	p<0.09	p<0.001	p<0.001	p<0.001	p<0.01
2°BUP				p<0.06	p<0.10	p<0.04	p<0.01
COU L				p<0.001	p<0.001	p<0.001	p<0.07
COU C							
E.M							
E.Q							
E.P							

En resumen, los grupos que menos rinden son los de octavo de EGB y COU letras seguidos por segundo de BUP que tiene un rendimiento intermedio entre COU letras y el grupo de psicología. Los grupos de COU ciencias y los diferentes grupos de estudiantes universitarios no muestran diferencias estadísticamente significativas entre sí.

Por tanto, hemos podido constatar que el nivel de instrucción produce diferencias significativas en el rendimiento de los sujetos. Así, las diferencias entre los grupos de adolescentes de la misma edad además de significativas son notables. Aunque estas diferencias, teniendo en cuenta los resultados de los grupos de estudiantes universitarios con diferencias en la formación química pero no matemática (respecto al razonamiento proporcional) hacen pensar que, en general, el rendimiento está más relacionado con el entrenamiento en razonamiento proporcional (no existen diferencias entre los grupos de COU ciencias y de estudiantes de química, por un lado, y los grupos de estudiantes de matemáticas y de psicólogos por el otro) que con el conocimiento del contenido químico. Aunque también estos resultados han podido deberse a un *efecto techo*. Tal vez las tareas no eran lo suficientemente difíciles como para discriminar entre estos grupos. De hecho, todos los grupos de expertos y el grupo de COU ciencias utilizan la regla multiplicativa en un alto porcentaje, concretamente el 48% COU ciencias, el 30'6% el grupo de matemáticos, el 38'8% el grupo de químicos y el 32% el grupo de psicólogos. En cambio, los grupos con un menor rendimiento utilizan mayoritariamente reglas aditivas, concretamente el grupo de octavo de EGB recurrió a esta regla el 49'4%, segundo de BUP el 38'9% y COU L el 38'4%.

5. Discusión y conclusiones

Resumiendo los resultados de nuestra investigación, hemos constatado que el rendimiento de los sujetos en problemas proporcionales varía según el contenido de la tarea. Así, la media de aciertos en las tareas de disoluciones y densidad fue significativamente mayor que en las de reacciones. En las tareas de reacciones los sujetos emplearon fundamentalmente reglas de correspondencia (10%) mientras que en las tareas de disoluciones y densidad la regla de correspondencia se utilizaba muy poco (6'6%).

La causa del peor rendimiento de los sujetos en tareas de reacciones ha podido deberse a las propias restricciones de la tarea. Estas tareas estaban basadas en la ley de proporciones

definidas, lo que imposibilitó diseñar las pruebas del mismo modo que el resto de las tareas. Como se recordará, esta ley al igual que la mayoría de las leyes ponderales químicas, está expresada en términos de correspondencia.

Un ejemplo en el que se comparan las tareas de reacciones de las disoluciones nos permitirá comprender esta diferencia de un modo más adecuado: Una de las tareas de disoluciones consistía en decidir qué recipiente, A o B, estaba más concentrado o si ambos tenían la misma concentración, por ejemplo, $7/2$ frente a $8/3$.

Para resolver correctamente esta tarea, podemos dividir ambas fracciones por separado y comparar los resultados, $7/2=3'5$ y $8/3=2'6$ o también podemos hallar el mínimo común múltiplo y multiplicar los miembros en cruz: $21/6=3'5$ frente a $16/6=2'6$. Por lo que podemos concluir que el recipiente A está más concentrado. Sin embargo, si este problema se nos presentara en una tarea de reacciones, supondría, según la ley de las proporciones definidas, que 7 porciones de Esferio reaccionan siempre con 2 porciones de Manganeseo para formar Esferuro de Manganeseo. Si disponemos de 8 porciones de Esferio y 3 de Manganeseo y nos preguntan cuánto sobra de cada uno, no es adecuado dividir las fracciones, como hemos hecho en el caso de la tarea de disoluciones, porque la información que obtendríamos no es interpretable. Resulta más apropiado (desde el punto de vista químico) tener como referente la primera fracción y a partir de ello comparar con la segunda fracción. (Aunque se podría resolver también hallando el mínimo común múltiplo (regla correcta desde el punto de vista matemático): $21/6$ frente a $16/6$, a partir de ello concluiríamos que, puesto que falta Esferio 21-16, sobra Manganeseo).

También hemos comprobado que los contenidos cercanos a la vida cotidiana mejoran notablemente el rendimiento de los sujetos aunque no significativamente, las diferencias fueron significativas únicamente para el grupo con menor nivel de instrucción, octavo de EGB, en *tareas de reacciones de dificultad computacional media*. Estos resultados son acordes con los de Saunders y Jesunathadas (1988), pero mientras que en su estudio aparecen diferencias para sujetos de enseñanza secundaria (noveno grado) aquí aparecen para octavo de EGB. Es posible que el efecto de esta variable hubiera sido mayor en sujetos de menor instrucción a los sujetos utilizados en nuestra muestra, teniendo en cuenta que la instrucción en razonamiento proporcional comienza en sexto de EGB.

Por otra parte, el rendimiento de los sujetos ante tareas con formato analógico mejora notablemente aunque sólo de modo significativo en *tareas de reacciones de dificultad computacional media para el grupo de octavo de EGB*. Estos resultados no son acordes con los de Neshor y Sukenik (1991), comentados anteriormente, sin embargo, en su estudio no utilizaron grupo control por lo que las mejoras del formato proposicional pudieron deberse a efectos de aprendizaje.

Los efectos localizados del formato de la tarea y los contenidos cercanos a la vida cotidiana se pueden considerar como pertenecientes a la zona de desarrollo próximo (Vigotskii, 1934), por lo que estas dos variables podrían servir como instrumentos mediadores para el aprendizaje del razonamiento proporcional.

Por otra parte, el rendimiento de los sujetos no varía en función de las unidades (continuas-discretas), con las que se presentó la tarea, ni tan siquiera en los grupos con mayor grado de conocimientos químicos (COU ciencias y el grupo de estudiantes de química). Según estos resultados, el razonamiento proporcional no estaría relacionado con las concepciones de los sujetos sobre la naturaleza de la materia sino con otro tipo de variables.

Respecto a los tres niveles de dificultad computacional establecidos, se confirmaron empíricamente. La regla más utilizada para el nivel de dificultad bajo fue de la aditiva (84'7%). En el nivel medio la regla más utilizada fue la de correspondencia (45%). Y para el nivel alto, la más empleada fue la multiplicativa (44'7%). Estos datos reflejan que los sujetos adaptan

sus reglas según el nivel de dificultad computacional. Aunque el grado de adaptación de las reglas no fue el mismo para todos los grupos: el análisis cualitativo confirma una mayor flexibilidad cognitiva de los grupos con mayor nivel de instrucción (los grupos con estudios universitarios) ante los distintos niveles de dificultad computacional.

Por otra parte, sólo se encontraron diferencias estadísticamente significativas entre los niveles de dificultad computacional alto y los niveles medio y bajo; y entre éstos últimos (medio y bajo), en los grupos de octavo de EGB y COU letras.

Por tanto, estos tres niveles de dificultad computacional deberían respetarse a la hora de secuenciar el currículum. De tal manera que se debe comenzar con problemas que puedan resolverse correctamente mediante reglas no multiplicativas y acabar con problemas en los que sea necesario emplear este tipo de reglas.

Por último, el análisis de varianza muestra diferencias significativas entre los diferentes grupos. Todos los grupos superaban el 50% de aciertos. Los grupos que menos rendían eran los de octavo de EGB y COU letras (entre éstos se encontraron diferencias significativas a favor de COU letras) seguidos por segundo de BUP que tuvo un rendimiento intermedio entre COU letras y el grupo de psicología (las diferencias no fueron estadísticamente significativas). Los grupos con mayor rendimiento fueron los de COU ciencias y los diferentes grupos de estudiantes universitarios (entre éstos grupos no se encontraron diferencias significativas).

Por tanto, como esperábamos, la instrucción mejora el rendimiento de los sujetos. Las diferencias entre los grupos con el mismo nivel de instrucción pero de tipos diferentes, COU ciencias y COU letras es acorde con la mayoría de los estudios en los que se comparan expertos y novatos (Chi, Glaser y Farr, 1988; Pozo, 1989).

Los datos procedentes del grupo de adultos universitarios sugieren que el razonamiento proporcional es una habilidad más bien independiente del contenido, con algunas restricciones impuestas por la tarea (problemas de reacciones). Aunque dado que se ha producido un efecto techo, no podemos concluir sobre si su alto nivel de rendimiento se debe a la instrucción específica recibida sobre la proporción o, como proponen otros autores, al mayor nivel de instrucción general (Voss *et al.*, 1986). Para comprobar esta última hipótesis, tendríamos que utilizar algún grupo de estudiantes universitarios sin instrucción específica sobre proporción además de tareas con mayor dificultad.

Referencias

- Case, R. (1985). *Intellectual development. Birth to adulthood*. Orlando: Academic Press. Trad. cast. de I. Menéndez. *El desarrollo intelectual. Del nacimiento a la edad madura*. Barcelona: Paidós, 1989.
- Chi, M.T.H. (1988). Overview. En: M.T.H. Chi; R. Glaser y M. Farr (Eds.) (1988): *The nature of expertise*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- Defior, S. (1990). La Reforma y las matemáticas: análisis comparativo. *Cuadernos de Pedagogía*, 425, 14-17.
- Duncan, Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). De la logique de l'enfant a la logique de l'adolescent. Paris: P.U.F. Trad. cast. de M.C. Cevasco. *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires: Paidós.
- Karplus, R. y Karplus, E.F. (1972). Ratio: a longitudinal study. En R. Karplus y E.F. Karplus: *Intellectual development beyond elementary school III: ratio, a longitudinal survey*. Berkeley: Lawrence Hall of Science, Universidad de California.
- Karplus, R. y Peterson, R.W. (1970). Intellectual development beyond elementary school II: ratio, a survey. *School Science and Mathematics* 70(9), 813-820.
- Karplus, R.; Pulos, S. y Stage, E.K. (1980). Early adolescents' structure of proportional reasoning. En R. Karplus, (Ed.): *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education*. Berkeley, California, 16 y 17 de Agosto.
- Karplus, R.; Pulos, S. y Stage, E.K. (1983a). Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh y M. Landau: *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Nueva York: Academic Press.
- Karplus, R.; Pulos, S. y Stage, E.K. (1983b). Early adolescents' proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*. 14, 219-233.

- Lovell, K. (1961). A follow study of Inhelder and Piaget's "The growth of logical thinking". *British Journal*, 52, 14-15.
- Lovell, K. y Butterworth, I.B. (1966). Abilities underlying the understanding of proportionality. *Mathematics Teaching*, 37, 5-9.
- Mayer, R.E. (1985). Capacidad matemática. En R.J. Sternberg (Ed.) *Human abilities*. Trad. cast. de J.M. Bastús. *Las capacidades humanas*. Barcelona: Labor.
- Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 1: differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11(2), 217-253.
- Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 2: problem solving, strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, 11(2), 331-363.
- Noelting, G. (1981). Qualitative and quantitative aspects in the development of proportional reasoning. En M.P. Friedman, J.P. Dasy N. O'Connor (Eds.): *Intelligence and Learning*. Nueva York: Plenum Press.
- Nesher, P. y Sukenik, M. (1991). The effect of formal representation on the relation of ratio concepts. *Learning and Instruction*, 1, 161-175.
- Pérez Echeverría, P. (en prensa) La solución de problemas matemáticos. En: M. Carretero y J.A. García-Madruga (Eds.): *Psicología y Educación*. Barcelona: Laia.
- Pozo, J.I.; Gómez Crespo, M.A.; Limón, M. y Sanz, A. (1991). *Procesos cognitivos en la comprensión de la ciencia: ideas de los alumnos sobre la química*. Madrid: Servicio de Publicaciones del M.E.C.
- Saunders, W.L. y Jesunathadas, J. (1988). The effect of task content upon proportional reasoning. *Journal of Research in Science Teaching*, 25(1), 59-67.
- Siegler, R.S. (1976). Three aspects of cognitive development. *Cognitive Psychology*, 8, 481-520.
- Siegler, R.S. (1978). The origins of scientific reasoning. En: R.S. Siegler (Ed.), *Children's thinking: What develops?* Hillsdale, N.J.: L.E.A.
- Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 401-412.
- Tourniaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 181-204.
- Vigotskii, L.S. (1934). *Myshlenie i rech*. Trad. cast. de la ed. inglesa de M.M. Rotger: *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: La Pléyade, 1977.
- Voss, J.F; Blais, H; Means, L; Greene, T.R. y Ahwesh, E. (1986). Informal reasoning and subject matter knowledge in the solving of economics problems by naive and novice individuals. *Cognition and Instruction*, 3(4)