

FRACASO ESCOLAR EN MATEMÁTICAS: CÓMO INTERVENIR PARA MEJORAR LOS RENDIMIENTOS INFANTILES¹

BERMEJO, V., LAGO, M.O., RODRÍGUEZ, P. Y PÉREZ, M.
Universidad Complutense de Madrid

Resumen

Uno de los objetivos prioritarios de la enseñanza de las matemáticas en el 1^{er} ciclo de EP consiste en la adquisición de los conceptos de adición y sustracción. En este estudio se presenta un programa psico-instruccional centrado en la enseñanza de estas habilidades, que afecta al profesor, al alumno y a los contenidos curriculares. Teniendo en cuenta esto, la evaluación sobre la eficacia del programa no sólo ha afectado a los alumnos, sino que también se ha extendido a los profesores. En el primer caso, los resultados han puesto de manifiesto que los alumnos del grupo experimental no sólo mostraban niveles más altos de rendimiento que los controles, sino que también superaban a éstos en los procedimientos de resolución. Por su parte los profesores, no sólo modificaron sus creencias sobre la enseñanza de las matemáticas, acercándose a los planteamientos constructivistas de la educación, sino que también cambiaron sus criterios de evaluación.

Abstract

One of the main goals in the teaching of mathematics during the 1st cycle of EP lies in the acquisition of the concepts of addition and subtraction. In this study we present a psycho-instructional program focused on the teaching of these skills, involving the teacher, the pupil and the curriculum content. Taking this into account, the assessment of the efficiency of the program not only affected to the pupils but also extended to the teachers. In the first case, the results showed that pupils from the experimental group not only showed higher levels of performance than the control groups, but also more efficient resolution procedures. As for the teachers, they modified their beliefs about the teaching of mathematics, coming near to the constructivist approach of education, and changed their assessment criteria too.

1. Introducción

Los preocupantes resultados obtenidos en matemáticas en las recientes evaluaciones realizadas por el Ministerio de Educación (Instituto Nacional de Calidad y Evaluación, 1995) hacen pensar en la necesidad de un cambio profundo en su enseñanza. Una transformación de este género implica desterrar los modelos tradicionales basados en la transmisión de conocimientos y

¹ Ayuda a la investigación educativa, CIDE 1995

acercarnos a otros planteamientos educativos más pertinentes y novedosos, como, por ejemplo, los constructivistas. Desde esta perspectiva, el aula constituye una comunidad de reflexión activa, un lugar donde los alumnos desarrollan ideas personales sobre las matemáticas (p.e., Bermejo, 1993; Cobb, 1988; Cobb, 1996; Cobb y Bauersfeld, 1995; Fosnot, 1996), lo que requiere importantes cambios en el modo de entender los roles del profesor y del alumno en el sistema educativo. Efectivamente, el profesor debe crear un clima de aula en donde el alumno tenga la oportunidad de discutir, integrar la nueva información en relación a otra, explicar y justificar sus propios métodos de solución. Asimismo, se asume que las explicaciones matemáticas que proporcionan los alumnos son razonables aún cuando no sean lo más correctas o adecuadas desde las matemáticas formales (Davis, 1992; Kaplan, Yamamoto y Ginsburg, 1996; Resnick y Klopfer, 1996). En consecuencia, el papel tradicional del profesor como conocedor y del aprendiz como desconocedor se desvanece, dejando paso a una imagen del profesor como facilitador, cuya tarea no consiste en dispensar conocimientos, sino en proporcionar a los estudiantes oportunidades para alcanzarlos (von Glasersfeld, 1996).

Desde estos planteamientos se han realizado algunos programas o proyectos de intervención para mejorar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el nivel de Educación Primaria, aunque son más bien escasos y a veces con enfoques específicos diferentes (p.e., Bermejo, 1993, 1996; Carpenter y Fennema, 1992; Fennema, Carpenter, Franke, Levi, Jacobs y Empson, 1996; Ginsburg, Klein y Starkey, 1998; Wood y Sellers, 1997; Yackel y Cobb, 1996, etc.). No obstante, en general, estos programas muestran la eficiencia del marco constructivista en el aula y en el rendimiento escolar.

La presente investigación parte de los planteamientos constructivistas y pretende mostrar que es posible mejorar la enseñanza-aprendizaje de la suma y la resta, mediante la implementación de un programa psicoinstruccional que afecte e integre simultáneamente al profesor, al alumno y a los contenidos curriculares. Cuatro ideas básicas constituyen los pilares teóricos de este programa. La primera se refiere a que los niños construyen su propio conocimiento matemático, de modo que no adquieren los nuevos contenidos mediante un simple proceso de absorción, sino que los integran y estructuran en función de sus competencias cognitivas (p.e., Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998; Cobb, 1988). En segundo lugar, y como consecuencia de lo dicho anteriormente, la instrucción en matemáticas ha de organizarse de manera que facilite la construcción de conocimientos por parte del alumno asumiendo que profesores y alumnos son creadores de significados y que los primeros se convierten en guías de aprendizaje, estructurando el clima social-cognitivo de la clase.

En tercer lugar, la base para secuenciar los objetivos de instrucción en matemáticas ha de provenir no sólo de los conocimientos que actualmente tenemos sobre el desarrollo general de los alumnos, sino también del desarrollo que siguen en la adquisición de contenidos matemáticos específicos. A este respecto, conviene resaltar que el bagaje de conocimientos se incrementa ostensiblemente, por ejemplo, sobre los pasos evolutivos concernientes al desarrollo de las estrategias de resolución de la adición y sustracción (p.e., el modelo evolutivo de las estrategias que proponen Carpenter y Moser, 1984), los factores explicativos de las dificultades encontradas por los niños al resolver los problemas de adición y sustracción (p.e., la estructura semántica del problema y el lugar de la incógnita, Bermejo 1990; Bermejo, Lago y Rodríguez, 1994; Bermejo y Rodríguez, 1987, 1990a, 1990b), los conocimientos informales (p.e., los estudios sobre las competencias tempranas de los niños sobre la habilidad de contar, la adición, la sustracción, la multiplicación y la división), etc.

Finalmente, las habilidades matemáticas deberían enseñarse preferentemente en el marco de la solución de problemas; ya que los primeros conceptos que desarrollan los niños sobre la adición y sustracción proceden de contextos de la vida real en los que "se da" o "se quita" algo, pero nunca de las expresiones numéricas. Además, los problemas ofrecen situaciones del mundo real, que motivan a los niños y facilitan la aplicación de sus habilidades matemáticas

(p.e., Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998; Ginsburg et al., 1998; Verschaffel y De Corte, 1997). Por otra parte, el consenso es unánime entre los investigadores en cuanto a la prioridad de la instrucción de los problemas con respecto a los algoritmos. En cuanto a los tipos de problemas verbales de adición y sustracción se suelen proponer cuatro categorías atendiendo a su estructura semántica (i.e., cambio, combinación, comparación e igualación) (ver, por ejemplo, Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998). Los problemas de cambio describen situaciones dinámicas en las que un conjunto se incrementa o disminuye (p.e. “Juan tiene 5 caramelos y Luis le regala 4 caramelos más. ¿Cuántos caramelos tiene Juan ahora?”). En los problemas de combinación aparecen dos cantidades disjuntas, que pueden considerarse aisladas o como partes de un todo (p.e., “Juan tiene 5 caramelos y Luis tiene 2. ¿Cuántos caramelos tienen entre los dos?”). Los de comparación presentan dos cantidades que se comparan entre sí y una tercera que muestra las diferencias entre ellas (p.e., “Juan tiene 3 caramelos y Luis tiene 7 caramelos más que Juan. ¿Cuántos caramelos tiene Luis?”). En los de igualación se incrementa o disminuye una cantidad para hacerla igual a otra (p.e. “Juan tiene 6 caramelos y Luis tiene 2. ¿Cuántos caramelos necesita Luis para tener los mismos que Juan?”). Finalmente, estos problemas adoptan distintas formulaciones dependiendo del lugar en el que se ubique la incógnita. En un estudio reciente hemos propuesto una jerarquización de estos problemas verbales atendiendo a la dificultad de los mismos (i.e., Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998).

En este estudio se llevó a cabo un programa psico-instruccional, durante un año escolar, con objeto de mejorar la enseñanza-aprendizaje de los conceptos de adición y sustracción, de cuyas características, desarrollo y evaluación trataremos a continuación.

2. Método

2.1. Participantes

Participaron cinco clases de 1^{er} curso de EP de tres colegios públicos de Madrid, de clase sociocultural media-alta. Tres clases constituyeron el grupo experimental, mientras que las dos restantes formaron el grupo control. La asignación de los profesores y alumnos a los grupos experimentales y controles fue voluntaria y en función de la disponibilidad del profesorado.

2.2. Material y procedimiento empírico

El material consistía en cuadernos que contenían las pruebas de evaluación de los alumnos y de los profesores, papel y lápiz.

El grupo experimental fue evaluado tres veces a lo largo del curso: en noviembre, febrero y mayo, mientras que el grupo control lo fue sólo en noviembre y mayo. La primera evaluación pretendía determinar los conocimientos previos de los niños de ambos grupos y elaborar el perfil matemático de cada uno de los niños del grupo experimental. La segunda evaluación permitió sopesar el avance de los niños en el aprendizaje matemático y elaborar igualmente un nuevo perfil matemático de cada niño. Finalmente, en mayo se evaluaron los aprendizajes de ambos grupos. Las pruebas utilizadas en estas evaluaciones consistían en problemas verbales y expresiones numéricas de suma y resta, y fueron las mismas para los dos grupos (experimental y control). En concreto, se incluyeron problemas de cambio y combinación con resultado desconocido, cambio con conjunto de cambio desconocido, igualación en el conjunto conocido y comparación con referente desconocido (para más detalles, ver Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998).

En todas los casos, los niños pasaron las pruebas individualmente, registrándose en vídeo toda la sesión experimental.

En cuanto a los profesores, se asume que su rol resulta relevante en el aprendizaje matemático. Por ello, los tres profesores que impartieron docencia en las clases experimentales realizaron, una vez concluida la primera evaluación, las siguientes actuaciones:

1. Cumplimentaron el Cuestionario I sobre actitudes y conocimientos sobre la enseñanza de los problemas verbales de suma y resta. El Cuestionario consta de tres partes: (1) formular problemas verbales a partir de expresiones numéricas de adición y sustracción, (2) responder a cuestiones relativas a la dificultad de los problemas verbales, procedimientos de resolución por parte de los niños, errores más frecuentes, etc. y (3) expresar su grado de acuerdo/desacuerdo, justificando sus respuestas, con 27 enunciados agrupados en tres dimensiones: conocimiento general sobre los principios constructivistas, evaluación y aplicación de los principios constructivistas a la enseñanza de la adición y sustracción.

2. Posteriormente, estos profesores asistieron a un seminario (10 horas) en los que se trataba y debatía con la ayuda de vídeos sobre los principios básicos de la enseñanza-aprendizaje desde una perspectiva constructivista, tipos de problemas verbales de sumar y restar, niveles de dificultad, estrategias más frecuentes utilizadas por los niños y errores típicos en cada problema.

3. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos por nosotros en una investigación anterior (Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998), se entregó a los tres profesores la secuencia de problemas verbales que por su dificultad pensamos conviene enseñar durante el primer curso de EP, para que posteriormente los integrasen dentro de los contenidos del currículo escolar de matemáticas. Concretamente, se propusieron seis tipos de problemas, incluyendo al menos uno de cada una de las cuatro categorías clásicas descritas en la introducción.

4. Finalmente, pusimos a disposición de cada profesor el perfil matemático de cada uno de sus alumnos, obtenido a partir de la evaluación realizada en noviembre, aconsejándoles su uso diario en clase y la modificación de este perfil siempre que se manifestaran cambios en el comportamiento matemático de un niño.

En otro orden de cosas, dos observadores adiestrados asistieron dos veces por mes a cada una de las clases experimentales de matemáticas a fin de conocer la dinámica y el estilo de enseñanza de la clase, anotando sobre una "guía de observación" lo que acontecía en cada minuto, tanto por parte del profesor, como de los alumnos. En esta guía se recogían informaciones sobre cuatro áreas: (1) las intervenciones del profesor y el grado de iniciativa del alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje; (2) la naturaleza de las actividades requeridas al alumno; (3) los recursos didácticos y (4) la evaluación de los aprendizajes.

Una vez terminada la tercera evaluación, se pidió a los profesores del grupo experimental que cumplimentaran de nuevo el Cuestionario I sobre creencias que pasaron al concluir la primera evaluación, así como un Cuestionario II auto-evaluativo sobre el impacto que el programa había tenido en su docencia (i.e., se pregunta sobre el modo en que había influido en su modo de evaluar, en su manera de enseñar las matemáticas, en la selección de los objetivos para ese ciclo, en su comprensión sobre el razonamiento matemático de los niños y en el modo de conceptualizar las matemáticas).

Por último, los profesores del grupo control completaron en el mes de noviembre sólo la parte tercera del Cuestionario I, y en mayo respondieron al Cuestionario III sobre los contenidos matemáticos impartidos en sus clases.

3. Análisis y Discusión de Resultados

Para facilitar el análisis y la exposición de los numerosos datos, examinaremos primero los resultados obtenidos sobre los profesores, para estudiar después los datos correspondientes a los alumnos de los grupos experimental y control.

3.1. Perfil psico-educativo de los profesores

Los datos relativos a los profesores colaboradores proceden del Cuestionario I sobre conocimientos y creencias, del Cuestionario II de auto-evaluación, de las observaciones en clase y finalmente, del Cuestionario III cumplimentado por los profesores del grupo control.

Cuestionario I sobre conocimientos y creencias

Los resultados correspondientes a la primera parte del Cuestionario pusieron de manifiesto la insuficiencia de conocimientos por parte de los profesores sobre las distintas categorías de problemas verbales. Todos ellos tendían a proponer problemas de cambio, apareciendo tan sólo en alguna ocasión los de igualación (i.e., profesor 1), comparación (i.e., profesor 2) y combinación (i.e., profesores 2 y 3). Además, ninguno de ellos formuló las cuatro categorías de problemas verbales de adición y sustracción, ni dentro de una categoría todos los tipos posibles atendiendo al lugar ocupado por la incógnita.

En la segunda parte, los profesores tenían que juzgar el grado de dificultad de una serie de problemas, e indicar las estrategias de resolución y errores característicos de sus alumnos y si éstos propondrían o no algoritmos para resolverlos. No se apreciaron diferencias en las valoraciones asignadas por los profesores, siendo los problemas de cambio con resultado desconocido los más sencillos y los de comparación con conjunto de comparación desconocido y referencia desconocida e igualación en conjunto desconocido e igualación con cantidad comparada desconocida los de mayor dificultad. En esta misma prueba fueron escasos los comentarios sobre las estrategias, los errores y los algoritmos. Tan sólo el profesor 1 (Gex I) hizo mención a la estrategia de "contar con los dedos" en el problema de cambio con conjunto inicial desconocido y el profesor 3 (Gex III) a la estrategia "suma" en el de comparación con conjunto de comparación desconocido y a la "resta" en cambio con conjunto de cambio desconocido. Los errores tendrían su origen, según sus comentarios, al plantear una operación inadecuada (profesor 1) y los derivadas de una interpretación incorrecta del término "más que" en el problema de comparación con conjunto de comparación desconocido. Estos datos ponen de relieve dos aspectos: a) que los profesores evalúan a sus alumnos centrándose en los resultados más que en los procesos, y b) confirman lo señalado por Carpenter y Fennema (1988, 1989) en el sentido de que el profesorado de EE.UU. presentaba lagunas parecidas de formación en torno a toda esta temática.

En la tercera parte del cuestionario se valoraron las creencias del profesor en torno a la enseñanza de las matemáticas. En esta ocasión tuvimos que excluir a uno de los profesores del grupo experimental por dejar inacabado el cuestionario. Los resultados de esta tercera parte mostraron: (1) existen diferencias significativas ($\chi^2 = 12.27$, $p < 0.001$) entre los dos profesores del grupo experimental con respecto al grado de acuerdo/desacuerdo con los planteamientos constructivistas, de manera que el profesor 3 (Gex III) se mostró sistemáticamente "de acuerdo" y el profesor 1 (Gex I) presentó niveles altos de desacuerdo (10/27 items); (2) no hay diferencias entre los profesores del grupo control y el profesor 1 del experimental.

En cuanto a la segunda aplicación del cuestionario I de creencias a los profesores del grupo experimental (final de curso), encontramos que el profesor 3 (Gex III) presentó un patrón de respuesta similar al de la primera aplicación. En cambio, la prueba de McNemar indicó que en el profesor 1 (Gex I) se produce un cambio significativo entre sus respuestas de la primera y segunda aplicación ($\chi^2(1, n=27) = 2.86$, $p < 0.05$ con la corrección de Yates), mostrando un mayor acuerdo con los principios constructivistas. Este resultado viene a resaltar el efecto positivo que el programa de intervención ha tenido sobre el pensamiento instruccional de este profesor.

Cuestionario II de auto-evaluación sobre el programa de intervención

La información aportada por este cuestionario indica que el programa de intervención ha influido, en general, en el modo de enfocar la enseñanza de las matemáticas por parte de los profesores de los grupos experimentales. Efectivamente, el profesor 1 (Gex I) respondió afirmativamente a las cuestiones relativas al desarrollo del pensamiento matemático, al modo de enseñar y a la evaluación. Las explicaciones que acompañan sus respuestas permitieron observar, por ejemplo, la importancia concedida a la individualización (“individualizando la evaluación para fijarme en las estrategias o errores cometidos por los niños”), a la necesidad de respetar el ritmo de aprendizaje de cada niño (“hasta ahora los cursos me habían enseñado cómo dar clase para que sea más atractiva. Ahora la importancia la tiene el niño, y de él se parte para enseñar”). Por su parte, el profesor 2 (Gex II) contestó positivamente a todas las cuestiones planteadas. Desde su punto de vista, la participación en el proyecto le ha permitido, por ejemplo, conocer las diferentes categorías de problemas verbales e incluirlas dentro de sus objetivos de enseñanza. No obstante, si bien reconoció la importancia de la evaluación de procesos consideró que aún se encontraba lejos de aplicarla sistemáticamente. Finalmente, el profesor 3 (Gex III) había participado, hacía un año, en un curso de doctorado, impartido sobre esta temática en la Facultad de Psicología de la Universidad Complutense, por lo que sus actividades instruccionales se guiaron tanto en función de los conocimientos adquiridos en ese curso, como en función de las pautas propias de esta investigación. En este sentido, mencionó que había incorporado diferentes tipos de problemas a lo largo del curso y que había introducido cambios en la evaluación (“Evaluó de forma individualizada. Cuando un alumno comete un error se lo hago saber con un círculo, haciéndolo reflexionar sobre el mismo”).

Las observaciones en clase

Calculada la fiabilidad interjueces en cada conducta observada, encontramos, en general, un alto nivel de acuerdo entre los observadores, que se sitúa en .80

Con respecto al área de *intervenciones del profesor y grado de iniciativa del alumno*, hay que resaltar que los profesores no favorecieron en gran medida las iniciativas de los estudiantes (ver Tabla 1). En la mayoría de las ocasiones recurrieron a la explicación para enseñar a los niños como resolver las tareas. No obstante, el profesor 3 (Gex III) permitió en algunas ocasiones que los propios alumnos descubrieran cómo realizarla. En el profesor 2 (Gex II) se observa el fenómeno inverso y en el 1 (Gex I) apenas se registró este comportamiento.

Los tres profesores corregían las tareas individualmente, pero en el último mes el profesor 2 (Gex II) aumentó la conducta de corregir para toda la clase. Por su parte, los alumnos resolvieron las tareas de modo individual, aunque también resultó frecuente que lo hicieran conjuntamente en los grupos II y III.

En cuanto a la *naturaleza de las actividades propuestas*, aunque los profesores 1 y 2 propusieron problemas a sus alumnos, centraron su enseñanza de la suma y resta en torno al algoritmo, mientras que el profesor 3 lo hizo claramente en los problemas verbales.

En el área de *recursos didácticos* se constató que sólo el profesor 3 (Gex III) y sus alumnos utilizaron frecuentemente diversos recursos (p.e., dibujos, objetos, etc.), mientras que en las aulas de los dos profesores restantes fue inusual la presencia de recursos didácticos.

Por último, en el área de *evaluación* de los aprendizajes se puede observar que esta evaluación no se centraba exclusivamente en el resultado, sino que los tres profesores optaron por evaluar también los procesos.

Tabla 1.- Porcentaje de conductas registradas a lo largo de las diversas observaciones

	PROF. 1 (G. I)			PROF. 2 (G. II)			PROF. 3 (G. III)		
	FEBRERO	MARZO	ABRIL	FEBRERO	MARZO	ABRIL	FEBRERO	MARZO	ABRIL
Explicación del profesor:									
Individual	2.6		1.3	2.8	8.3	3	3.5	2.9	7.5
A toda la clase	10.9	1.6	5.7	2.8	3.2	7.4	12	11.6	5.1
En pequeños grupos				0.7	1.1		0.5		
Descubrimiento del alumno	0.9		2.5	6	5.2	4.8	8.7	11.6	6.3
El profesor corrige de manera:									
Individual	14	13	8.2	8.6	16.4	3	5	7.6	11.3
A toda la clase	1.3	0.5	3.1	4.6	1.7	9.3	4.3	7	4.2
En pequeños grupos				0.2	1.7		0.3		
El profesor explica el error:									
Individual	4.8	3.6		4.9	10.9	3.3	4.1	1.7	7.9
A toda la clase	2.2	1	1.9	2.5	0.6	4.8	1.5	3.5	1.9
En pequeños grupos					0.3		0.7		
El profesor retroalimenta:									
Respuesta correcta	0.4			4.4	4.6	4.5	4.1	3.5	5.7
Respuesta no correcta	0.9			3.5	0.6	1.5	2.6	2.9	2.1
El profesor plantea cuestiones:									
En la discusión			0.6	0.2		0.4	0.2	0.6	
Sin discusión			0.6	0.5		0.4	0.7		
El profesor ofrece información:									
En la discusión				0.7		0.7	0.3	1.2	
Sin discusión			0.6	0.2		0.4	1		
Los alumnos intervienen cuando el profesor les pregunta	2.2	5.2	6.3	6.7	4.6	12.6	7.8	5.8	2.7
El alumno explica la solución de:									
Respuestas correctas	0.4		1.3	3.2	1.4	3	1.8	2.9	3
Respuestas no correctas			0.6	5.6	0.9	1.5	1.3	1.7	3.6
El alumno es corregido por un igual	0.4	0.5	3.1	3.2	1.7	1.1	1.2	1.2	1.8
El alumno pregunta al profesor	3.9		3.1	1.6			0.5		0.6
Los alumnos resuelven tareas:									
Individual	44.1	64.6	50.3	10.6	19.3	11.2	6.4	10.5	12.2
A toda la clase			4.4	3.9	4.6	7.8	7.6	5.2	6.9
En pequeños grupos				0.9	0.3				
El profesor contextualiza las tareas				3.7			7.3	4.7	0.6
El profesor facilita materiales				5.6	2.6		6.6	2.9	5.1
El profesor utiliza materiales						5.2	2	1.2	1.2
El profesor utiliza esquemas				0.5		0.4	1.5	1.2	0.3
El profesor impone la práctica	0.9					1.9	0.5		
El profesor evalúa el resultado	4.4		5.7	4.2	7.5	2.6	1.3	6.4	7.2
El profesor solicita justificación:									
Del error	2.6	0.5		4.4	0.3	3	2.5	0.6	2.1
de la estrategia correcta	3.1	9.4	0.6	3.2	2.3	6.3	2.3	1.7	1

Cuestionario III sobre problemas verbales y expresiones numéricas

Este Cuestionario se pasó solamente a los dos profesores del grupo control (Gc IV y Gc V). No se encontraron diferencias notables entre ambos profesores, ya que los problemas de cambio, combinación y expresiones numéricas fueron los que más frecuentemente (i.e., muchas veces o algunas veces) plantearon a sus alumnos. No ocurrió lo mismo con el resto de problemas verbales (igualación o comparación), ya que su frecuencia osciló entre nunca o pocas veces. Asimismo, ambos profesores apuntaron que a lo largo del curso sus alumnos habían resuelto más cuentas o algoritmos que problemas verbales.

En resumen, la aplicación de los distintos Cuestionarios y observaciones en el aula nos ha permitido realizar un seguimiento de los cambios instruccionales producidos en el profesorado de los grupos experimentales, como resultado de su participación en este programa de intervención. Estos cambios se manifiestan, al menos, en los siguientes ámbitos:

a) En el Cuestionario I sobre conocimientos relacionados con la adición y sustracción, estos profesores justificaban el escaso uso de los problemas verbales en sus clases alegando que eran complejos para los niños. No obstante, a lo largo del curso escolar no sólo conocieron la existencia de diferentes tipos de problemas verbales, sino que además los propusieron a sus alumnos.

b) Igualmente, el apartado relativo a las estrategias y errores de este mismo Cuestionario no registraba prácticamente respuesta alguna. Sin embargo, tanto en las Observaciones en clase como en el Cuestionario de Auto-evaluación y en el Cuestionario de creencias, los profesores consideraron estos aspectos fundamentales, no sólo en el proceso de evaluación, sino también como una herramienta útil a la hora de comprender el desarrollo del razonamiento matemático de los niños. De ahí que los tres profesores insistieran en la importancia de individualizar la enseñanza.

c) Vale la pena resaltar los cambios que se produjeron en el profesor 1 (Gex I) tras la segunda aplicación del Cuestionario I de creencias. En efecto, estos cambios resultaron fundamentales, ya que afectaron a la tercera dimensión del Cuestionario referente a la aplicación de los principios constructivistas a la enseñanza-aprendizaje de la adición y sustracción.

d) Finalmente, los cambios que acabamos de señalar presentan un alcance diferente en cada uno de los profesores, repercutiendo dichas diferencias en el rendimiento diferencial de los niños, como veremos en el siguiente apartado. Por ejemplo, el profesor 3 (Gex III) estableció como objetivo prioritario en la enseñanza de la adición y sustracción la resolución de problemas, relegando a un segundo plano las expresiones numéricas. En cambio, los otros dos profesores propusieron a los niños diferentes tipos de problemas, pero hicieron hincapié en la resolución de expresiones numéricas. Probablemente, sólo el profesor 3 (Gex III) se acercaría al tipo de actividad instruccional propio del nivel III propuesto por Fennema et al. (1996), ya que este profesor se interesó más que los demás por organizar el curriculum de matemáticas en torno a los problemas verbales, solicitando a los niños que solucionaran una amplia variedad de problemas y pidiéndoles que creasen los suyos propios.

3.1. Perfil matemático de los alumnos

En este apartado analizaremos las respuestas de los niños, siguiendo el orden cronológico de las evaluaciones: noviembre, febrero y mayo.

El tratamiento estadístico de los datos consistió en sucesivos ANOVAS ejecutados con el programa BMDP-2V, una vez llevada a cabo la transformación arco-seno de las proporciones de ensayos correctos.

En cada una de las mediciones se efectuaron dos ANOVAS, en uno de ellos teniendo en cuenta el factor operación (adición/sustracción) en el que quedan excluidos los problemas de

combinación al no poderse formular en términos sustractivos, y un segundo análisis sobre los problemas aditivos únicamente.

Por último, para completar el perfil matemático de los alumnos comentaremos los procedimientos de resolución.

Primera evaluación

Los resultados del ANOVA mixto 5 (Grupo: lex, llex, lllex, IVc y Vc) x 4 (Tarea: cambio, comparación, igualación y expresiones numéricas) x 2 (Operación: adición y sustracción) con medidas repetidas en los dos últimos factores, muestran que sólo resulta significativo el factor Tarea ($F_{3,285} = 3.62$, $p < 0.05$); mientras que no lo son los efectos principales de los factores Grupo ($F_{4,95} = 1.81$) y Operación ($F_{1,95} = 0.94$). En efecto, las medias correspondientes a los grupos no presentan diferencias importantes, de modo que a principio de curso todos los grupos (experimental y control) tenían una competencia matemática parecida, o para ser más precisos, no había diferencias estadísticamente significativas entre ellos (Tabla 2). Lo mismo cabe decir con respecto al tipo de operación (adición, sustracción), ya que los niños encuentran una dificultad similar en las tareas de suma y resta. Este dato contrasta con el hábito de los textos de postergar la enseñanza de la sustracción con respecto a la enseñanza de la adición.

En cuanto al factor Tarea, el análisis de las comparaciones múltiples con la prueba de Tukey indica, conforme a los datos de otros estudios (i.e., Bermejo, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1990b, 1994; Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998; Carpenter y Moser, 1984; De Corte y Verschaffel, 1987; Stern, 1993), que los problemas de cambio son los más sencillos (i.e., existen diferencias significativas al comparar los problemas de cambio-comparación y cambio-igualación, en ambos con una $p < 0.05$).

En la interacción Operación x Tarea ($F_{3,285} = 7.46$, $p < 0.01$) se aprecia que el rendimiento en las tareas de adición supera claramente al obtenido en las de sustracción en los problemas de cambio y comparación, siendo similar en las expresiones numéricas.

Posteriormente, hemos realizado un nuevo ANOVA mixto 5 (Grupo: lex, llex, lllex, IVc, Vc) x 5 (Tarea: cambio, combinación, comparación, igualación y expresiones numéricas) con medidas repetidas en el último factor, para incluir los problemas de combinación ausentes en el análisis anterior. El efecto principal del factor Tarea ($F_{4,380} = 45.4$, $p < 0.01$) y la interacción Tarea x Grupo ($F_{16,380} = 2.13$, $p < 0.05$) son igualmente significativos. En el primer caso, las comparaciones múltiples muestran que son significativos los contrastes entre los problemas de cambio vs combinación, comparación vs combinación, igualación vs combinación y expresiones numéricas vs combinación con una $p < 0.05$, siendo en todos los casos los problemas de combinación más sencillos que las restantes tareas. Además, la interacción Tarea x Grupo pone de manifiesto que el comportamiento del G lllex tiende a ser homogéneo a lo largo de las distintas tareas, los otros grupos presentan una clara heterogeneidad, de modo que obtienen puntuaciones máximas en algunas tareas y mínimas en otras (p.e., el G IVc) (Tabla 2).

Segunda evaluación

Esta evaluación se lleva a cabo exclusivamente en los grupos experimentales. La aplicación del ANOVA mixto 3 (Grupo: lex, llex y lllex) x 4 (Tarea: cambio, comparación, igualación y expresiones numéricas) x 2 (Operación: adición/sustracción) con medidas repetidas en los dos últimos factores, arroja diferencias significativas tan sólo en los efectos principales del factor Tarea ($F_{3,141} = 5.97$, $p < 0.01$). La prueba de Tukey indica que alcanza la significatividad las comparaciones entre las tareas de cambio vs igualación ($p < 0.01$), comparación vs igualación ($p < 0.05$) e igualación vs expresiones numéricas ($p < 0.01$), siendo los problemas de igualación

Tabla 2.- Medias y desviaciones típicas, entre paréntesis, de las respuestas correctas a lo largo de las tres evaluaciones, en las tareas de adición y sustracción

	ADICIÓN					SUSTRACCIÓN				
	G I	G II	G III	G IV	G V	G I	G II	G III	G IV	G V
CAMBIO										
1ª	0.76 (0.96)	0.40 (0.06)	0.68 (0.64)	0.51 (0.69)	0.33 (0.69)	0.54 (0.71)	0.40 (0.06)	0.68 (0.86)	0.50 (0.82)	0.33 (0.04)
2ª	1.08 (1.15)	0.92 (0.96)	0.93 (0.88)			1.10 (1.10)	0.63 (0.56)	0.97 (0.86)		
3ª	1.62 (1.25)	1.55 (1.18)	1.92 (1.09)	0.92 (1.08)	0.52 (0.52)	1.10 (1.14)	1.06 (1.03)	0.72 (1.13)	0.82 (1.01)	0.35 (0.04)
COMBINACIÓN										
1ª	1.49 (1.27)	0.92 (0.95)	1.69 (1.16)	1.99 (1.21)	1.21 (1.21)					
2ª	2.11 (1.17)	1.52 (1.21)	1.91 (1.09)							
3ª	2.32 (1.04)	1.70 (1.18)	2.70 (0)	1.99 (1.22)	1.71 (0.81)					
COMPARACIÓN										
1ª	0.50 (0.72)	0.36 (0.01)	0.60 (0.67)	0.37 (0.50)	0.39 (0)	0.50 (0.72)	0.38 (0.04)	0.41 (0.03)	0.29 (0.03)	0.29 (0)
2ª	0.83 (0.05)	0.51 (0.83)	0.93 (1.13)			0.94 (1.12)	0.53 (0.62)	0.43 (0.03)		
3ª	0.95 (1.11)	0.84 (0.99)	1.28 (1.12)	0.59 (0.83)	0.30 (0.02)	1.05 (0.17)	0.69 (0.84)	0.66 (0.68)	0.79 (1.03)	0.38 (0.39)
IGUALACIÓN										
1ª	0.31 (0.03)	0.37 (0.03)	0.48 (0.08)	0.29 (0.03)	0.32 (0.04)	0.30 (0.02)	0.38 (0.04)	0.47 (0.07)	0.29 (0.01)	0.31 (0.02)
2ª	0.71 (0.51)	0.58 (0.60)	0.93 (0.88)			0.43 (0.51)	0.41 (0.06)	0.92 (0.88)		
3ª	0.75 (0.95)	0.42 (0.07)	1.09 (1.04)	0.41 (0.50)	0.33 (0.03)	0.74 (0.96)	0.41 (0.06)	0.93 (0.88)	0.41 (0.50)	0.32 (0.03)
EXPRESIÓN NUMÉRICA										
1ª	0.45 (0.51)	0.73 (0.83)	0.66 (0.65)	0.44 (0.49)	0.44 (0.52)	0.30 (0.03)	0.39 (0.05)	0.45 (0.06)	0.41 (0.50)	0.31 (0.03)
2ª	1.09 (1.14)	0.92 (0.95)	1.91 (1.08)			0.76 (0.95)	0.59 (0.60)	0.51 (0.07)		
3ª	1.93 (1.21)	1.54 (1.18)	2.32 (0.85)	1.13 (1.17)	0.60 (0.62)	1.31 (1.21)	0.80 (0.80)	1.36 (1.06)	0.73 (0.92)	0.34 (0.04)

los más difíciles. Este resultado pone de manifiesto que el conocimiento de los niños sobre los problemas se hace cada vez más extenso a lo largo del curso y que la enseñanza de la adición y sustracción en los grupos experimentales no se limitó a un único tipo de problema, ya que no se aprecian diferencias, por ejemplo, entre los problemas de cambio y comparación (Tabla 2).

Cuando analizamos solamente las tareas aditivas, el ANOVA mixto 3(Grupo: lex, llex y Illex) x 5 (Tareas: cambio, combinación, comparación, igualación y expresiones numéricas) con medidas repetidas en el último factor, señala de nuevo la existencia de diferencias significativas en el factor Tarea ($F_{4,188} = 15.04$, $p < 0.01$). En comparación con las restantes tareas, el rendimiento en las de combinación es más elevado, encontrándose las de igualación en el extremo opuesto. Así, la prueba de Tukey muestra diferencias significativas entre los problemas de cambio vs combinación, comparación vs combinación, igualación vs combinación, igualación vs expresiones numéricas con una $p < 0.01$ y comparación vs igualación con $p < 0.05$.

Tercera evaluación

En esta evaluación examinamos de nuevo el rendimiento de los grupos experimental y control. Tras la aplicación de un ANOVA mixto 5 (Grupo: lex, llex, Illex, IVc y Vc) x 4 (Tareas: cambio, comparación, igualación y expresiones numéricas) x 2 (Operación: adición/sustracción) con medidas repetidas en los dos últimos factores, encontramos que son significativos los efectos principales de los factores Grupo ($F_{4,94} = 9.42$, $p < 0.01$) y Tarea ($F_{3,282} = 9.48$, $p < 0.01$). Con respecto al Grupo, resaltaremos primeramente que dicho factor no había sido significativo en ninguna de las evaluaciones precedentes. Sin embargo, en esta ocasión la media del grupo experimental supera claramente a la obtenida por el grupo control ($\underline{M}_{\text{lex}}=1.25$ y $\underline{M}_{\text{co}}=0.68$), lo que permite afirmar, al menos provisionalmente, que el programa de intervención ha tenido un efecto positivo en los niños del grupo experimental (Tabla 2 y Figura 1). Este dato confirmaría nuestras expectativas, en el sentido de que un mayor conocimiento del desarrollo del pensamiento matemático infantil y una mayor comprensión y aplicación en el aula de los principios constructivistas por parte del profesor redundaría positivamente en la comprensión y el rendimiento matemático de los alumnos.

Las comparaciones múltiples entre los grupos experimentales no son significativas. No obstante, la media del grupo Illex ($\underline{M}=1.51$) es superior a la media del grupo lex ($\underline{M}=1.28$), siendo la media del grupo llex ($\underline{M}=0.97$) la más baja de los grupos experimentales (Figura 2). Estos resultados confirman igualmente nuestra hipótesis, ya que tanto en las observaciones en clase, como en los Cuestionarios I y II, el profesor del grupo Illex mostró un mayor conocimiento sobre el desarrollo del pensamiento matemático infantil y el clima de su clase estuvo siempre más próximo a los principios constructivistas que fundamentan esta investigación, como vimos anteriormente. En esta dirección apuntan también los resultados obtenidos por Carpenter, Fennema, Peterson y Carey (1988) y Peterson, Fennema, Carpenter y Loef (1989), cuando encuentran que los profesores que obtenían una puntuación más alta en el cuestionario de creencias y tenían, por tanto, una perspectiva más constructivista, obtenían rendimientos más altos en sus alumnos que aquellos profesores que puntuaban más bajo. Fennema et al. (1996) muestran de un modo más detallado y preciso en un estudio longitudinal, como una formación del profesorado, que tiene en cuenta el desarrollo del pensamiento matemático infantil y la perspectiva constructivista, cambia las creencias y el modo de enseñar de los profesores, y como a su vez los alumnos de estos profesores mejoran sus rendimientos matemáticos en la clase. En nuestro estudio, el rendimiento de los grupos experimentales supera significativamente al de los grupos control debido fundamentalmente a que en el programa de intervención hemos proporcionado a los profesores herramientas que les permitiesen tomar decisiones informadas, basadas en los conocimientos sobre el razonamiento matemático de los niños y la perspectiva

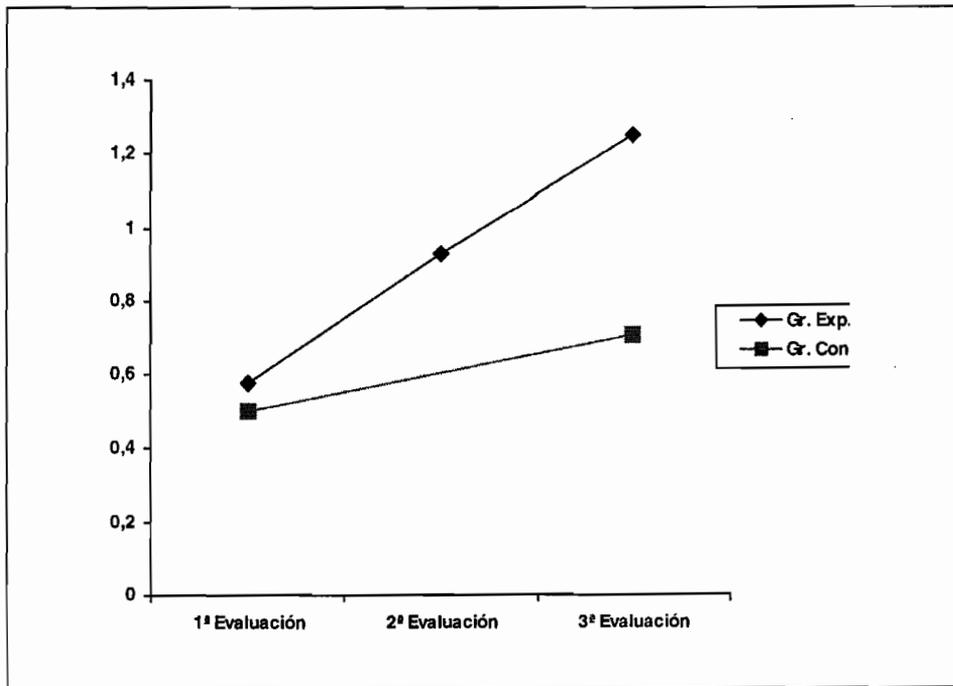


Figura 1.- Representación gráfica de los rendimientos promedio agrupados de los grupos experimentales y control en las tres evaluaciones realizadas

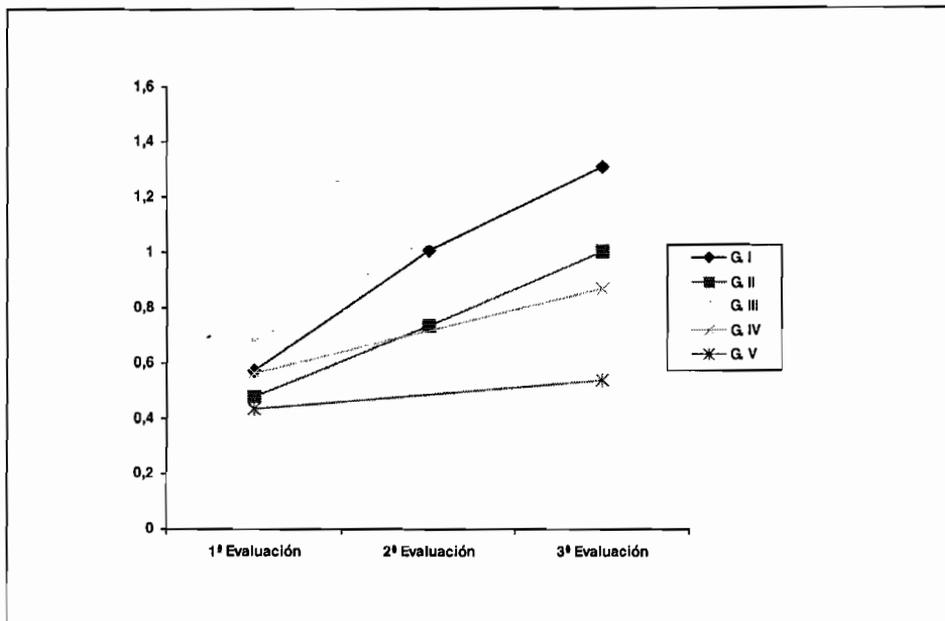


Figura 2.- Rendimientos promedio individuales para cada uno de los grupos analizados en el estudio a lo largo de las diversas evaluaciones

constructivista de la educación. Nuestros datos concuerdan en general con los encontrados por Carpenter y col. (1989, 1996, etc.) en el programa CGI; en cambio discrepan en gran medida de los resultados obtenidos en el programa de Cobb y colaboradores (1988, 1991, 1995, 1996), debido probablemente a que desde este proyecto se olvida, al menos en parte, la incidencia de la formación del profesorado con respecto al desarrollo del pensamiento matemático infantil en el rendimiento matemático del niño.

3.3. Procedimientos de resolución

En las páginas que siguen analizaremos con brevedad los cambios evolutivos experimentados por los niños tanto con respecto a las estrategias correctas empleadas como a los errores cometidos.

Las estrategias correctas

En este apartado estudiaremos evolutivamente los cambios acaecidos en las estrategias desplegadas por los niños a lo largo de las distintas evaluaciones. Para ello, hemos agrupado las estrategias en cuatro categorías (MODELADO DIRECTO, CONTEO, MEMORÍSTICAS, REGLAS), que se corresponden con las propuestas en la literatura sobre el tema (p.e., Bermejo y Rodríguez, 1990a; Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998; Carpenter y Moser, 1983). Dentro de las estrategias de MODELADO DIRECTO, que son las más sencillas y primitivas, quedan enmarcados los procedimientos de “contar todo”, “quitar de” y “quitar a”; en las de CONTEO se incluyeron “contar a partir de uno de los sumandos”, “contar hasta” y “contar hacia atrás”; las MEMORÍSTICAS son aquellas estrategias en las que los niños recuperan inmediatamente la respuesta de la memoria y finalmente, las REGLAS se basan en descomposiciones de los números que facilitan el cálculo de la operación (Tablas 3 y 4).

Los distintos análisis realizados permiten concluir que los Gex II y Gex III experimentan cambios importantes en las estrategias que utilizan entre la primera (noviembre) y la última evaluación (mayo). Así, mientras que en la primera evaluación en el Gex II utilizan principalmente el MODELADO DIRECTO, este procedimiento disminuye casi en un 40% en la última y por el contrario, aumentan las de CONTEO en más de un 20%, las MEMORÍSTICAS en un 12% y aparecen por primera vez las REGLAS. Los niños del Gex III emplean mayoritariamente las basadas en el CONTEO, aunque en la última evaluación también recurren a las MEMORÍSTICAS y REGLAS.

El Gex I no experimenta variaciones importantes entre la primera y última evaluación, ya que tanto en las tareas de adición como en las de sustracción ponen en marcha sobre todo estrategias de CONTEO.

En cuanto a los grupos de control, los cambios más importantes tuvieron lugar en el Gc IV, que usan tanto las de MODELADO DIRECTO como las de CONTEO. Los niños del Gc V utilizan mayoritariamente las basadas en el MODELADO DIRECTO.

En resumen, los resultados indican, al igual que en el estudio de Cobb (p.e., 1988), que las estrategias aplicadas por los niños de los grupos experimentales en la última evaluación son evolutivamente más complejas que las empleadas por los del grupo control. Por tanto, la mejora en los grupos experimentales no sólo se tradujo en un nivel de ejecución superior, sino que también afectó a los procedimientos de resolución. En concreto, los niños del grupo experimental recurren más frecuentemente a las estrategias de CONTEO que los del grupo control en los problemas de cambio de adición y sustracción tanto en la primera como en la última evaluación (adición 1ª: $\chi^2(1, n=53)=6.81, p<0.05$; 2ª: $\chi^2(1, n=131)=7.33, p<0.05$; sustracción 1ª: $\chi^2(1, n=30)=3.6, p<0.05$; 2ª: $\chi^2(1, n=69)=17.78, p<0.05$) y en la tarea de expresiones numéricas en la última

Tabla 3.- Porcentajes de las distintas estrategias en las tareas de cambio, combinación, igualación y expresiones numéricas de adición

	CAMBIO				COMBINACIÓN				COMPARACIÓN				IGUALACIÓN				EXPRESIONES NUMÉRICAS			
	MD	C	M	R	MD	C	M	R	MD	C	M	R	MD	C	M	R	MD	C	M	R
G I																				
1ª	29	62	3	6	58	32	10			40			60	57	36		7	30	46	24
2ª	27	55	9	9	27	68		5	36	5	14			20	55	15	10	30	59	10
3ª	21	53	3	1	25	20	23	3	20	50	25	5		21	55	15	10	18	56	24
G II																				
1ª	58	33	8		8	13	7		100									67	25	10
2ª	28	44	6	21	39	62			29	57	14			32	53	16		28	56	6
3ª	30	50	14	7	27	41	32		50	17	17	17		31	44	25		21	52	23
G III																				
1ª	24	65	2		40	47	13			67										
2ª	16	56	2	8	39	56		6	30	60				29	33	17	21	38	47	6
3ª	22	53	25		82	41	23	9	36	9	36	18		29	29	29	14	17	42	34
G IV																				
1ª	41	32	19	8	51	40	7	2		33			67	53	40	7		29	35	31
2ª					29	42	27	2	55	27	18			31	64	6		33	30	37
3ª	19	53	25	4																
G V																				
1ª	75	25			60	36		4						57	43			31	50	11
2ª					49	44	8		100					30	65	5		43	45	12
3ª	47	44	9																	

MD: Modelado directo, **C:** conteo, **M:** memorísticas, **R:** reglas.
1ª: Primera evaluación, **2ª:** Segunda evaluación, **3ª:** Tercera evaluación

Tabla 4.- Porcentajes correspondientes a las estrategias en las tareas de cambio, comparación, igualación y expresiones numéricas de adición

	CAMBIO				COMPARACIÓN				IGUALACIÓN				EXPRESIONES NUMÉRICAS			
	MD	C	M	R	MD	C	M	R	MD	C	M	R	MD	C	M	R
GI																
1ª	33	36	18	12		71	14	14		55	45		38	50	13	
2ª	59	25	5	11	13	73	13		33	33	8	8	44	42	4	9
3ª	38	55	5	2	21	53	26		37	43	17	3	30	55	13	1
GII																
1ª	85	15			100				40	40	20		89		11	13
2ª	84	6	3	6	33	33	33		47	13	20	20	78		9	22
3ª	53	21	9	18	4	60			43	29	14	14	67	11		
GIII																
1ª	40	60	25	5		100			33	58	8		38	25	38	
2ª	57	13	13	17				100	36	45	5	14	4	35	62	
3ª	47	24	6	24	20	60	20		29	29	33	8	41	27	12	21
GIV																
1ª	53	17	15	15		50	50		46	39	15		31	34	28	6
2ª									33	37	20	10	69	7	15	9
3ª	64	19	14	4	20	60	20									
GV																
1ª	83	9	9						86	14			60	20	20	
2ª																
3ª	74	23	3		100				72	17	11		67	30		3

MD: Modelado directo, **C:** conteo, **M:** memorísticas, **R:** reglas.
1ª: Primera evaluación, **2ª:** Segunda evaluación, **3ª:** Tercera evaluación

Tabla 5.- Porcentajes de los errores cometidos en los problemas verbales de adición de cambio, combinación, comparación, igualdad e igualdad, así como en las expresiones numéricas de adición

	CAMBIO			COMBINACIÓN			COMPARACIÓN			IGUALACIÓN			EXPRESIONES NUMÉRICAS		
	C	P	E	C	P	E	C	P	E	C	P	E	C	P	E
G I															
1ª	81	13	7	65	18	18	93	2	5	94	5	1	85	5	10
2ª	56	15	29	36	9	55	88	3	9	90	1	9	94	9	27
3ª	50	20	30	50	38	13	68	14	18	90	5	5	57	21	21
G II															
1ª	77	8	15	67	13	20	69	17	14	88	10	2	92	3	5
2ª	57		43	42		53	91		9	100			54		46
3ª	81		19	50	13	38	100			95			44	6	50
G III															
1ª	78	15	7	71	29		95		5	86	7	7	86	4	11
2ª	58		42			100	92		8	85		15	75		25
3ª	75		25				82	9	9	96		4	67		33
G IV															
1ª	78	10	12	11	56	33	96	2	2	89	6	6	76	11	13
3ª	65	18	18	100			90	5	5	90	3	7	62	3	35
G V															
1ª	88	7	6	86	10	5	100			94	3	4	89	5	6
3ª	66	19	15	57	14	29	95		5	92	3	6	74		26

C: error conceptual, **P:** error procedimental, **E:** error de ejecución
1ª: Primera evaluación, **2ª:** Segunda evaluación, **3ª:** Tercera evaluación
Grupos experimentales: I, II y III, **Grupos control:** IV y V

Tabla 6.- Porcentajes de los errores cometidos en los problemas verbales de sustracción de cambio, comparación e igualación, así como en las expresiones numéricas de sustracción

	CAMBIO			COMPARACIÓN			IGUALACIÓN			EXPRESIONES NUMÉRICAS		
	C	P	E	C	P	E	C	P	E	C	P	E
G I												
1ª	75	8	18	100			91	5	5	92	3	5
2ª	38	25	38	94		6	82	13	6	43	22	35
3ª	24	24	52	93	4	4	82	8	10	44	15	41
G II												
1ª	81	9	11	93	7		89	5	5	86	8	6
2ª	64	36	36	100			91		9	70	3	27
3ª	46	19	35	92			94		7	52	13	35
G III												
1ª	83		17	91	4	5	78	13	9	86		14
2ª	57	7	36	91		10	68		32	72	6	22
3ª	60		40	100			75	5	20	40	10	50
G IV												
1ª	54	21	25	92	4	4	86	13	1	68	17	15
3ª	48	23	29	84	8	8	82	10	8	68	8	24
G V												
1ª	81	6	13	100		2	91	3	6	63	2	5
3ª	82	15	28	98			85	4	11	63	13	21

C: error conceptual, **P:** error procedimental, **E:** error de ejecución
1ª: Primera evaluación, **2ª:** Segunda evaluación, **3ª:** Tercera evaluación
Grupos experimentales: I, II y III, **Grupos control:** IV y V

evaluación (χ^2 (1,n=127)=15.94, $p<0.05$). Las estrategias MEMORÍSTICAS se incrementan significativamente en los grupos experimentales, en la última evaluación, en las tareas de cambio de adición (χ^2 (1,n=52)=4.92, $p<0.05$), comparación de adición (χ^2 (1,n=12)=5.4, $p<0.05$) e igualación de adición (χ^2 (1,n, =24)=6,75, $p<0.05$). Este resultado, indica la mejora sustancial que se produjo en los procedimientos de resolución en los grupos experimentales en la última evaluación, ya que estas estrategias están prácticamente ausentes en la primera evaluación. Las diferencias entre los experimentales y controles en las estrategias de REGLAS, aparecen en la última evaluación en las tareas de expresiones numéricas de sustracción (χ^2 (1,n=22)=4.5, $p<0.05$) y cambio de sustracción (χ^2 (1,n=17)=9.94, $p<0.05$). Por último, en las de MODELADO DIRECTO se apreciaron diferencias entre la primera y la última evaluación en la tarea de expresiones numéricas de sustracción (1ª: χ^2 (1,n=65)=23.4, $p<0.05$; 2ª: χ^2 (1,n=64)=22.56, $p<0.05$), incrementando su presencia en los experimentales.

En conclusión, los grupos experimentales muestran en la última evaluación estrategias de resolución que no sólo son superiores a las empleadas por los grupos control, sino que incluso estarían por encima del tipo de estrategias que cabría esperar para su nivel escolar.

Los procedimientos erróneos

Agrupamos los errores en tres categorías (CONCEPTUALES, PROCEDIMENTALES y de EJECUCIÓN), que como su propio nombre indica, denotan niveles de competencia diferentes. Los CONCEPTUALES que aluden a la incapacidad del sujeto para construir una representación interna adecuada de la tarea propuesta, incluyen las siguientes estrategias incorrectas: “repetir una de las cantidades”, “inventar la respuesta”, “transformar el problema”, “no saberlo hacer”, “palabra clave”, “no entender la secuencia del algoritmo”, “no conocer el signo de sumar o restar” y “sumar las unidades con las decenas en las expresiones numéricas”. Los PROCEDIMENTALES se refieren a la incapacidad para traducir la representación interna en la elección de un procedimiento de resolución adecuado y son los siguientes: “control inadecuado del algoritmo”, “no saber hacerlo con cantidades grandes” y “sumar las unidades con las decenas”. Finalmente, los de EJECUCIÓN se producen al aplicar el procedimiento adecuado y se situaron dentro de esta categoría los “errores de conteo” y los “errores de cálculo mental” (Tablas 5 y 6)

En cuanto a los resultados, los cambios entre las evaluaciones 1ª y 3ª residen en la categoría de errores cometidos por los niños. A este respecto, podemos destacar lo siguiente. En primer lugar, aunque todos los grupos cometen principalmente errores CONCEPTUALES, en los experimentales también aparecen los de EJECUCIÓN. En segundo lugar, los niños de los grupos experimentales registran una mayor heterogeneidad de errores CONCEPTUALES que los de control, debido a que tienden a poner en marcha diversas estrategias, aunque incorrectas, que les pudieran conducir finalmente al éxito esperado. En tercer lugar, si bien no se produjeron diferencias entre los grupos experimental y control en la primera evaluación, éstas sí se manifiestan en la última evaluación en los errores CONCEPTUALES en los problemas de cambio adición (χ^2 (1,n=97)=8.24, $p<0.05$), cambio sustracción (χ^2 (1,n=85)=14.4, $p<0.05$), comparación adición (χ^2 (1,n=131)=5.56, $p<0.05$), expresiones numéricas aditivas (χ^2 (1,n=70)=18.51, $p<0.05$) y de sustracción (χ^2 (1,n=101)=20.04, $p<0.05$); y en la categoría de errores PROCEDIMENTALES en los problemas de cambio adición (χ^2 (1,n=23)=9.78, $p<0.05$).

5. Conclusiones

Los resultados obtenidos en la implementación del programa de intervención en el aula de matemáticas de 1º curso de EP muestran que es posible mejorar la enseñanza-aprendizaje de la adición y sustracción. En concreto, resaltaremos los siguientes aspectos:

1. Los profesores del grupo experimental dedicaron más tiempo a la enseñanza de problemas verbales de lo que era habitual en ellos.

2. Estos profesores cambiaron sus creencias sobre la enseñanza de las matemáticas, aplicando en el aula los principios constructivistas, aunque de manera desigual entre ellos.

3. Sus evaluaciones se centraron fundamentalmente en los procesos y menos en el resultado.

4. Los niños del grupo experimental obtuvieron niveles de rendimiento significativamente más altos que los del grupo control, siendo, no obstante, sus competencias similares al inicio del programa.

5. Las diferencias entre los grupos experimental y control fueron significativas con respecto a las estrategias y los errores cometidos. Las estrategias empleadas por los niños del grupo experimental fueron más complejas, incluso de lo que cabría esperar para su edad. En cuanto a los errores, en este mismo grupo disminuyeron los relacionados con la competencia conceptual y aumentaron los relativos a la ejecución.

Concluyendo, los resultados del programa de intervención confirman el efecto positivo del mismo tanto en los profesores como en los alumnos. En investigaciones posteriores esperamos extender su aplicación a un número mayor de profesores y colegios, así como controlar y medir algunos aspectos, que por el momento no hemos conseguido, tal como incidir aún más en la importancia de la participación del alumno y establecer las repercusiones de estos cambios en las creencias y actitudes de los alumnos hacia las matemáticas.

6. Referencias

- Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética*. Barcelona: Paidós.
- Bermejo, V. (1993). Perspectivas innovadoras en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Investigación cognitiva y práctica educativa. En J. Beltrán, V. Bermejo, M.D. Prieto y D. Vence (Coords.), *Intervención psicopedagógica* (pp. 169-185). Madrid: Pirámide.
- Bermejo, V. (1996). Enseñar a comprender las matemáticas. En J. Beltrán y C. Genovard (Eds.), *Psicología de la instrucción I. Variables y procesos básicos* (pp. 571-594). Madrid: Síntesis.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje*, 39-40, 71-81.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990a). Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos. *Investigaciones Psicológicas*, 8, 23-41.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990b). La operación de sumar. En V. Bermejo, *El niño y la aritmética* (pp. 107-140). Barcelona: Paidós.
- Bermejo, V., Lago, M.O. y Rodríguez, P. (1994). Problemas verbales de comparación y comprensión de la relación comparativa. *Cognitiva*, 6, 159-174.
- Bermejo, V., Lago, M.O. y Rodríguez, P. (1998). Aprendizaje de la adición y de la sustracción. Secuenciación de los problemas verbales según su dificultad. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 51(3-4), 533-552.
- Carpenter, T. y Moser, J. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 179-202.
- Carpenter, T. y Fennema, E. (1992). Cognitively guided instruction: building on the knowledge of students and teachers. *International Journal of Research in Education*, 17, 457-470.
- Carpenter, T.P., Fennema, E., Peterson, P.L. y Carey, D.A. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (5), 385-401.
- Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist*, 23, 87-103.
- Cobb, P. (1996). Where is the mind? A coordination of sociocultural and cognitive constructivist perspectives. En C. Fosnot (Ed.), *Constructivism: Theory, perspectives, and practice* (pp. 33-52). NY: Teachers College Press.
- De Corte, E. y Verschaffel, L. (1987). Using retelling data to study young children's word problem solving. En J. Sloboda y D. Rogers (Eds.), *Cognitive processes in mathematics* (pp. 42-59). NY: Oxford University Press.
- Fennema, E., Carpenter, T., Franke, M., Levi, L., Jacobs, V. y Empson, S. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 403-434.
- Fosnot, C. (Ed.) (1996). *Constructivism: Theory, perspectives, and practice*. NY: Teachers College Press.

- Ginsburg, H., Klein, A. y Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice. En Sigel, I. y A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology Vo. 4* (pp. 401-476). NY: John Wiley & Sons
- Kaplan, R.C., Yamamoto, T. y Ginsburg, H.P. (1996). La enseñanza de conceptos matemáticos. En L. Resnick y L. Klopfer (Eds.), *Curriculum y cognición* (pp. 105-139). Madrid: AIQUE.
- Peterson, P., Fennema, E., Carpenter, T. y Loef, M. (1989). Teachers' pedagogical content beliefs in mathematics. *Cognition and Instruction*, 6(1), 1-40.
- Resnick, L. y Klopfer, L. (Eds.) (1996). *Curriculum y cognición*. Madrid: Aique.
- Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children?. *Journal of educational Psychology*, 85, (1), 7-23
- Verschaffel, L. y De Corte, E. (1997). Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the Primary school?. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics* (pp. 69-97). Hove, UK: Psychology Press.
- Von Glasersfeld, E. (1996). Introduction: Aspects of constructivism. En C. Fosnot (Ed.), *Constructivism: Theory, perspectives, and practice* (pp. 3-7). NY: Teachers College Press.
- Wood, T. Y Sellers, P. (1997). Deepening the analysis: Longitudinal assessment of a problem-centered mathematics program. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 163-186.
- Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.