SOBRE EL SENTIDO Y LA REFERENCIA DE LOS ENTES MATEMÁTICOS Y SIMBÓLICOS

Leonardo Águila Pizarro

Antes de comenzar este trabajo conviene precisar algunos conceptos. En primer lugar, lo que se entiende por "entidad matemática" y "entidad simbólica".

El concepto de "entidad matemática" tiene una gran extensión y el de "entidad simbólica" puede ser aclarado revisando el primero. Para Rolando Chuaqui (1) "hablar acerca de las cosas con comodidad, implica la introducción de signos y estos signos pueden ser, en algunos casos, letras, de lo que se sigue que en otros casos, pueden ser números". Continúa Chuaqui, "los objetos matemáticos de uso más común en la vida corriente son los números naturales, esto es los enteros positivos 1, 2, 3...". Para Chuaqui, la respuesta a la pregunta por la esencia de los números, se puede conseguir por dos vías: por el método axiomático y por el método genético. Veamos entonces, como opera el primer método, es decir, el axiomático: "Suponemos existente el conjunto N de los números: suma (+), multiplicación (·): también símbolos para algunos números como 1, 2, 3... Con estos símbolos, podemos construir otros términos que denotan también números, como $2 + 5$, $3 \cdot 1$, $(5 + 1)$, etc. Relacionamos dos términos por la igualdad, = (u otras relaciones como "menor que") para constituir proposiciones (o lo que es lo mismo, oraciones), p. Ej. $2 + 5 = 3 \cdot 1$ (esto es, $2 + 5$ es igual a $3 \cdot 1$). Estas proposiciones pueden ser falsas (como el ejemplo) o verdaderas (como lo es $2 + 5 < 3 \cdot 4$). También queremos aserciones generales sobre los números. Para esto necesitamos introducir las variables X, Y, Z, que se refieren a números cualquieras. Así, cuando queremos decir que la suma es conmutativa entre números, podemos hacerlo por, "para todo número X y todo número Y, $X + Y = Y + X$. Con estas proposiciones y las partículas lógicas "no", "o", "si... entonces", etc. Formamos proposiciones compuestas. Todas estas proposiciones son las que nos interesan. Las llamaremos proposiciones numéricas. Algunas son

verdaderas y otras, falsas. Las proposiciones numéricas verdaderas expresan propiedades del conjunto N de los números naturales. Un sistema axiomático para N es un conjunto de proposiciones numéricas verdaderas (esto es, propiedades de N) de las cuales se pueden deducir las otras proposiciones numéricas verdaderas (propiedades de N)".
Para la escuela formalista, cuyo fundador es Hilbert, las proposiciones matemáticas son de la siguiente naturaleza: "2 + 2 = 4", "3 – 2 = 1", 4 > 3", "5 + 3 = 8", "6 : 4 = 4", etc. (2)

Lo importante de todo esto, es que hemos obtenido un primer indicio acerca de nuestra preocupación. En primer lugar, bajo "entidad matemática" abarcamos a los números naturales y éstos se pueden entender como "signos" que pueden combinarse con otros dando origen a ciertas operaciones. Sin embargo, la expresión "entidad matemática" no es sinónima de "número", ya que existen otras entidades matemáticas y que no son números, como por ejemplo, las "variables" y que en este trabajo son sinónimas de "entidades simbólicas". Una variable o entidad simbólica, por lo tanto, cumple con los requisitos formulados por Chuaqui (3). Además, una entidad matemática puede relacionarse con una entidad simbólica, como lo veremos más adelante.

Volvamos ahora a lo que nos preocupa. Frege tiene una tendencia hacia la referencia de tipo empírica, esto es, una entidad susceptible de ser percibida sensorialmente. Su análisis no ha dejado de lado aquellas oraciones con ciertas entidades dudosas de referencia empírica, como por ejemplo, "Odiseo fue desembarcado en Itaca mientras dormía". En esta oración, la referencia no es empírica, ya que la expresión "Odiseo" no alude a ninguna entidad empírica.

En esta sección se demostrará que existen expresiones con sentido y con una referencia "sui generis", ideales, puras y, estas expresiones, son las "entidades matemáticas" y "entidades simbólicas".

Si las entidades matemáticas o simbólicas no tienen una referencia de tipo empírica, entonces la referencia aludida por dichas entidades sería de la misma naturaleza que de aquellas oraciones verbales como la anteriormente señalada. Esto es, lo que me propongo ver en esta segunda parte, es decir, de qué modo opera el sentido y la referencia en las entidades matemáticas y simbólica y qué tipo de referencia tienen.

¿Cuál es la referencia de "$2^3 \cdot 2 + 2$"? Según Frege, "el número 18". Pero el signo "18" también lo podemos obtener relacionando los siguientes signos: "$3 \cdot 6$". En estos casos, podemos decir entonces, que ambas expresiones (4) tienen la misma referencia, pero no así su sentido: ambas tienen diferente sentido. La referencia "18" no es empírica, es decir, el objeto designado bajo dicha expresión resulta de la combinación entre otras cifras o números que tampoco tienen un objeto de tipo empírico, es decir, ninguna de dichas expresiones alude a un objeto capaz de ser percibido sensorialmente. La referencia en estos casos, es de otra naturaleza.

En su artículo "Función y Concepto", Frege afirma lo siguiente: "Es natural aquí la objeción de que, no obstante, "$2 = 4$", y "$2 > 1$" afirman algo completamente distinto, expresan pensamientos completamente distintos; y a pesar de ello, se puede sustituir "2^4" por "$4 \cdot 4$", porque ambos signos tienen la misma referencia. En consecuencia, también "$2^2 = 4$", y "$4 \cdot 4 = 4^2$" se refieren a lo mismo (5). Esto hace concluir a Frege que la igualdad de referencia no tiene como consecuencia la igualdad de sentido o pensamiento. Pero lo que aún no queda claro, es qué tipo de referencia es la implicada en los entes matemáticos. Frege aclara esto: "La tendencia actualmente muy difundida a no considerar como objeto más que lo que puede ser percibido con los sentidos induce erróneamente a tomar por números los signos numéricos mismos, a considerarlos los verdaderos objetos de estudio; y entonces, naturalmente, 7 y 2 + 5 serían distintos. Pero esto no se puede mantener, ya que no podemos hablar en absoluto de cualesquiera propiedades aritméticas de los números sin remitirnos a la referencia de los signos numéricos" (6). En otras palabras, no podemos hablar de números por sí solos sin señalar la referencia a la cual aluden y esta referencia numérica, en este contexto, son números.

Veamos ahora como opera el sentido en las expresiones matemáticas. Sean los siguientes ejemplos: i) "2", ii) "1 + 1", iii) "3 – 1", iv) "6 : 3". Todos estos ejemplos, tienen la misma referencia, con exclusión del primer caso. En efecto, los restantes casos (ii, iii, iv) se refieren a la misma referencia: el número 2. Sin embargo, tienen diferente sentido. En el segundo caso, el sentido es otorgado por el signo "+", en el tercero, por el signo "-" y en el cuarto, por el signo ":". Ahora bien, el primer caso puede haber sido obtenido por suma, resta o división. Esto indica entonces, que nuevamente tenemos que especificar el sentido en aquellos casos de signos aislados, como en el caso análogo de "caballo" o "Aristóteles". En nuestros ejemplos, los signos "+", "-" y ":" aparecen otorgando un conocimiento de cómo se obtiene la referencia "2". Esto es el sentido y aquí aparece con una mayor exactitud.

Las expresiones "2^4" y "$4 \cdot 4$" tienen la misma referencia, es decir, son nombres propios del mismo número, pero no tienen el mismo sentido. ¿Por qué no tienen el mismo sentido? Simplemente, porque ambas expresiones a pesar de referirse al mismo número (referente) dicen cosas diferentes. En el primer caso, tenemos una potencia y en el segundo, una multiplicación. Se llega a la misma referencia pero entregando una manera diferente de lograrlo. Por otra parte, si ambas expresiones entregan el mismo producto, no hay entonces obstáculo para sustituir una por otra en algún contexto de acción y operación en el cual es signo o la expresión numérica actúen con libertad, es decir, sin obstáculos. Más adelante veremos en qué casos esto no sucede con igual autoridad.

Las expresiones "(1 + 1) + (1 + 1)" y "3 + 3", tienen la misma referencia, a saber, el número 6. Sin embargo, distinto sentido. En el primer caso, hablamos de una suma de pares y en segundo, de una multiplicación. En estos casos, el sentido aparece con toda claridad y esta claridad es producto de los signos relacionales, los que indican, una manera precisa de obtener el producto o referencia. En otros casos, la referencia aludida por ciertas expresiones numéricas no permite una sinonimia. Tal es el caso de las siguientes expresiones:

"$2^2 = 4$" y "$2 > 1$". En estos casos, la referencia es distinta porque también lo es el sentido. El sentido cambia cuando la referencia no es la misma, por ejemplo:

$$2 + 2 - (3 - 1) \qquad \text{y} \qquad (2 + 2) - 3 \cdot 3$$

$$4 - (2) \qquad\qquad (4) - 9$$

$$2 \qquad\qquad - 5$$

Veamos otros ejemplos:

Los siguientes pares de números son equivalentes. ¿Por qué son equivalentes?

Tenemos: $(3, 2)$ y $(5, 4)$

(3) y $(4) = 7$

(2) y $(5) = 7$

Por lo tanto, ambos pares de números son equivalentes: ambos pares arrojan el mismo resultado (referente). Además, en estos casos el sentido opera en forma inversa pero sólo si esperamos un resultado específico (en este caso el número "7"). Dos pares de números son equivalentes cuando: $a + b = b + x$. Veamos otro ejemplo:

Tenemos: (3, 4) y (7, 8) = 11. Son equivalentes puesto que: 4 + 7 = 11 y 8 + 3 = 11

La referencia es la misma y, el sentido, también. Pero si hacemos la operación inversa: $4 + 7$ y $3 + 8$, tenemos el mismo resultado pero ahora hemos especificado la operación mediante la expresión "operación inversa". Así, el resultado o referente es aclarado por el sentido y, este último, aparece nítido, sin ninguna mancha de oscuridad.

Ahora bien, de acuerdo a esta pauta podemos obtener la siguiente conclusión: "cuando sumamos pares de números equivalentes, obtenemos resultados equivalentes". En otras palabras, obtenemos el mismo referente. Obtenemos un número y no una cosa.

Tenemos: $(3, 2) + (1, 7)$

$(5, 4) + (3, 9)$

En estos cuatro pares de números, podemos obtener la misma referencia mediante la misma operación anterior. El sentido, por lo tanto, no sólo está señalado por el signo "+", esto es, la suma, sino que además por su referencia a un sistema.

Tenemos. $3 + 1 = 4$ $5 + 3 = 8$

$2 + 7 = 9$ $4 + 9 = 13$

Ahora bien:

$(3, 2) + (1, 7) = (4 + 9) = 17$

$(5, 4) + (3, 9) = (8 + 13) = 17$

7 10

En consecuencia, la referencia es la misma puesto que los resultados son similares. Los números equivalentes son una prueba de como pueden operar sin ningún problema tanto el sentido y la referencia propuesto por Frege. En este tipo de operaciones, como en muchos otros más, encontramos que la teoría de Frege opera sin ningún inconveniente. Sin embargo, es conveniente destacar algo. La igualdad de referencia, en el sentido de que el objeto referente es el mismo para dos expresiones distintas, no implica como conclusión la sinonimia entre "igualdad" e "identidad". En efecto, dos expresiones pueden ser iguales, pero no idénticas. Por el principio de identidad, una cosa es idéntica a sí misma, pero no idéntica a otra. Si dos expresiones arrojan el mismo resultado, no significa que sean idénticas. En estos casos es cuando se hace necesario precisar.

Ahora veamos otras operaciones:

Tenemos:

Sean a + (b + c) las variables que representan a ciertos números y sea (b + c) + a, las mismas variables con los mismos números pero en distinto orden, y dichos números corresponden para a= 5, b = 3 y c = 2.

Así:

$$5 + (3 + 2) = (3 + 2) + 5$$

$$5 + 5 \qquad 5 + 5$$

$$10 \qquad 10$$

La operación llamada conmutatividad también es susceptible de caer bajo la teoría de Frege. En este ejemplo, la referencia es la misma, el número 5 y, el sentido, está comunicado por el signo "+" y por el sistema. Pasemos ahora a aquellos casos en los cuales no podemos hablar con la misma autoridad de sinonimia entre operaciones aritméticas.

Sea:
A = (1, 2, 3, 4, ...n) y B = (a, b, c, d, ...z)

En estas dos operaciones de conjuntos no es posible sustituir el conjunto A por B ni por A. El primer conjunto tiene por referencia a los números naturales y, el segundo, a las letras del abecedario. Como ambos conjuntos se refieren a elementos distintos, entonces la sinonimia no es posible. Si la referencia es distinta, también lo es el sentido... esto puede postularse como una ley e incluso la siguiente: si la referencia es la misma, el sentido de dos expresiones puede ser distinto y esto es lo que hemos visto anteriormente. Dos expresiones pueden tener el mismo referente, pero con distinto sentido. Ahora bien, en Lógica Simbólica existen ciertas operaciones que pueden ser sustituidas por otras dando origen al mismo resultado (referente). Tales operaciones son conocidas como leyes. Veamos algunas:

Leyes de idempotencia:

a)	P	v	P	=	P
	V		V		V
	V		V		V
	F		F		F
	F		F		F
		V			
		V			
		F			
		F			

b)	P	·	P	=	P
	V		V		V
	V		V		V
	F		F		F
	F		F		F
		V			
		V			
		F			
		F			

En ambas operaciones el resultado es el mismo. Ambos ejercicios son leyes porque aluden al mismo referente. En estos casos, la sinonimia opera sin ninguna dificultad. El sentido está dado por los conectivos y por lo conectado: en el primer caso por la disyunción y, en el segundo por la conjunción.

Leyes asociativas:

a)	(P	v	O)	v	R
	V	V	V	V	V
	V	V	V	V	F
	V	V	F	V	V

b)	P	v	(O	v	P)	
	V	V	V	V	V	
	V	V	V	V	F	
	V	V	F	V	V	...

a) ...					
	V	V	F	V	F
	F	V	V	V	V
	F	V	V	V	F
	F	F	F	V	V
	F	F	F	F	F

b)						
	V	V		F	F	F
	F	V		V	V	V
	F	V		V	V	F
	F	V		F	V	V
	F	F		V	V	F

\+ ....(R)...............................+

Todos estos ejemplos, muestran cómo se puede obtener un mismo resultado a partir de operaciones distintas. Veamos ahora, si obtenemos lo mismo en el álgebra de la Lógica.

Usamos f y t en lugar de "Fido" y "Tractatus" y G, T, A, E, en lugar de gato, gata animal y elegante, respectivamente. Realizamos la operación llamada cuantificación:

i) Tractatus es animal : At
ii) Tractatus no es animal : Nat
iii) Tractatus es gata y animal : Tt. At
iv) Fido no es gato y no es animal: N (Af. Gf)
v) Fido no es un gato sino un elegante animal gata y aunque tractatus no es elegante es un animal gato.

NGf. Ef. Af. Tf. Net. At. Gt.

Del mismo modo podemos cuantificar las cuatro proposiciones típicas de la Lógica tradicional: A, E, I, O, Por "x" representaremos a individuos y, las propiedades, por la primera letra con que comienza y con mayúsculas.

i) Todos los hombres son racionales	(a) (x) (Hx.Rx)
ii) Algunos ladrones son santos	(I) (Ex) (Lx.Sx)
iii) Ningún animal recuerda	(E) (x) (Ax.NRx)
iv) Algunos hombres no son santos	(O) (Ex) (Hx.NSx)

En estos casos, tenemos expresiones que aluden al mismo referente y con idéntico sentido. Esto se ha logrado simbolismo en donde la sinonimia arroja los mismo resultados. El propio Frege reafirma esta conclusión: "Parece que en el presente gana cada vez más adeptos la opinión de que la aritmética es lógica más desarrollada, de que una fundamentación más rigurosa de las leyes de la aritmética conduce a leyes puramente lógicas y sólo a leyes de este tipo. Yo también comparto esta opinión y fundo sobre ella la exigencia de ampliar el lenguaje simbólico de la aritmética para formar un lenguaje simbólico lógico" (7). He aquí el comienzo de la Lógica Simbólica.

En efecto, años más tarde, en 1910, aparecerá la obra *Fundamentos de la Matemática* o *Principia Mathemática*, en la cual Russell y Whitehead demostraron que toda la matemática se deriva de la lógica y que la primera es una rama de la segunda, constituyéndose la lógica en el fundamento de la matemática. De Frege extraerá Russell la tesis fundamental de la identidad de matemática y lógica.

Los signos numéricos o simbólicos, son un género de casos que no se presentan en el lenguaje común, porque en matemática no hay excepciones a la sustitución de un término por otro ya que, la matemática misma, es extensional. Un signo numérico, un símbolo, es libre para operar en cualquier contexto y en cualquier operación. La referencia no está condicionada por el mundo empírico y, por esta razón, Frege pensaba que los números no eran propiedades de las cosas. Cuando el número se asocia a un referente empírico, entonces el sentido mismo pierde su exactitud. O como dice el profesor Atria "lo lógico-matemático tiene su propia autonomía estructural, sus leyes de relación que unifican sus símbolos lógicos sin referencia unívoca a ningún contenido fisico determinado" (8).

CONCLUSIÓN

Hemos visto como la teoría de Frege *Sobre el sentido y la denotación* opera en la Matemática y la Lógica. Pero la referencia implicada en las entidades numéricas o simbólicas es de una naturaleza distinta a la implicada en expresiones verbales. En estas últimas, hacemos referencia al mundo de las cosas. De las cosas que ocupan espacio y están sometidas a las leyes del tiempo. En las entidades matemáticas o simbólicas hacemos referencia a un sistema, con símbolos y reglas de incorporación de otros símbolos, con variables y operaciones. Todo este conjunto permite dar sentido a una proposición matemática o simbólica y, la referencia, la obtenemos porque hay un todo que está indicando el modo de proceder. Para Frege el número no era una propiedad de las cosas, sino que una abstracción a partir del concepto de las cosas. Por eso decía "los números sólo se asignan a los conceptos".

Ahora bien, para ordenar lo que hemos detallado, utilizaré un trabajo por profesor Cofré (9) y que otorga una excelente guía de referencia hacia lo que estamos tratando. En efecto, el profesor Cofré ordena las expresiones en tres categorías: a) *expresiones reales*, b) *expresiones irreales* y, c) *expresiones ideales*. *Las expresiones reales* comunican un estado de cosas "hic et nunc" o se refieren al pasado. Las que se refieren al pasado son susceptibles de ser verificadas. En cambio, las actuales, a pesar de que también se verifican, "constan su presencia" en forma directa, en forma ostensible, por ejemplo, "la luna es redonda"; en esta proposición se alude a un estado de cosas, y hay verificación. *Las expresiones irreales*, por otra parte, nombran objetos cuya existencia es imaginaria y que no se da en el mundo fenoménico. Son los "entes de ficción", como por ejemplo, "los unicernios son amigos de los centauros". Esta proposición tiene un sentido, pero no tienen referencia empírica. Con respecto a las *expresiones ideales*, como por ejemplo: "triángulo", "8", o "línea recta", se hace referencia a un sistema o a conceptos que nombran ciertas relaciones y que son creados por el intelecto. La proposición: "triángulo es una figura plana limitada por tres rectas", tiene un sentido, otorgado por el sistema, pero la referencia, no es empírica, es lo que llamamos ideal, pura.

Ahora bien, en función de esta distinción, el profesor Cofré distingue expresiones que constituyen un sin-sentido por la mezcla de términos que correspondan a otros planos o contextos. Por ejemplo:

1. Confusión de plano real con el plano ideal:

   - "Napoleón fue número primo".

     Napoleón es término real y número primo, término ideal. Esta proposición carece de referencia y de sentido.

2. Confusión del plano irreal con el plano ideal:

   - "Don Quijote fue número entero". Esta proposición no posee referente ni sentido.

3. Confusión del plano irreal con el plano real:

   - "Sancho Panza fue embajador en Italia". Enunciado con sentido pero sin referencia perceptible.

4. Confusión del plano real con el plano irreal:

   - "Napoleón fue hermano de Don Quijote". Expresión que posee sentido pero no referencia perceptible.

- Magíster en filosofía, Universidad Austral, Valdivia.

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

(1) Rolando Chuaqui, *¿Qué son los números?*, Edit. Univ. 1ª. Edic. 1980, Santiago de Chile. El método axiomático fue aplicado a los objetos geométricos (puntos, rectas, cuerpos, etc.) desde la antigüedad y he preferido introducirlo por su convencionalismo original. En efecto, para usar el método axiomático (como dice Chuaqui) se consideran los objetos que se quieren estudiar (en nuestro caso los números) como ya existentes. Se estipulan algunas propiedades de ellos en proposiciones (u oraciones) llamadas axiomas.

(2) R. P. Ramsey, *Los Fundamentos de la Matemática*, Ediciones de la Universidad de Chile, 1968. Véase especialmente, el prefacio, p.4.

(3) En realidad, el uso de "variable" en cuanto a la referencia, es bien relativo ya que existen sistemas con distintas variables, como por ejemplo, el de R. Montague véase *Ensayos de Filosofía Formal*, Alianza Universidad, 1977 – España. También podemos usar variables para referirnos a palabras, o a palabras que denotan individuos o a palabras que denotan propiedades de individuos véase de Alberto Moreno, *Ejercicios de Lógica*, EUDEBA, 1973, especialmente el capítulo "Cuantificación", p.95.

(4) Uso de la palabra "expresión", en este contexto, con el mismo sentido aludido en la página 8. Pero ahora me refiero a números o símbolos.

(5) G. Frege, "Función y Concepto", en *Estudios sobre Semántica*. Edit. Ariel, Barcelona 1971, p.29.

(6) G. Frege, "Función y Concepto", p.19.

(7) Opt. cit. *Lógica y Semántica*, p.31 y 32.

(8) Manuel Atria R., *Sobre las funciones algebraicas y el conocimiento físico*, Universidad Católica de Chile, 1968.

(9) Juan O. Cofré Lagos, "Relaciones entre pensamiento y lenguaje", en *Estudios Filológicos*, número II, Facultad de Letras y Educación, 1976, Universidad Austral de Chile – Valdivia.