

INTUICIONISMO Y OBJETIVIDAD

Miguel Espinoza Verdejo*

Podemos constatar dos hechos: primero, para todo intuicionista en filosofía o en matemáticas, lo que existe al interior de la mente es el único contenido del pensamiento y del conocimiento, la única fuente de la verdad. Segundo, la ciencia es una actividad y un patrimonio colectivos. La pregunta es entonces: ¿cómo puede el intuicionista conciliar estos dos hechos? El objetivo de este ensayo es dar una idea del intuicionismo en matemáticas, en particular del pensamiento de Brouwer, y evaluar algunas críticas dirigidas contra la (supuesta) subjetividad de esa doctrina. Terminaré sugiriendo que alguna especie de intuicionismo puede ser el complemento epistemológico necesario del platonismo.

1. CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL INTUICIONISMO

Según los periodos de la historia y los adversarios del idealismo, esta doctrina ha adoptado diversas formas. Se supone que una de ellas en el campo de la filosofía de las matemáticas es el intuicionismo. Pero no es fácil establecer si en particular el intuicionismo de Brouwer es un idealismo. Para un idealista, ser es ser concebido en una experiencia mental. Ahora bien, decir, como lo hace el matemático holandés, que no tenemos derecho a afirmar la existencia si no tenemos contacto intuitivo con ella, no equivale a la afirmación idealista que ser, es ser concebido o percibido, que nada existe fuera de la experiencia humana.

Antes de su existencia en filosofía de las matemáticas, el intuicionismo es una doctrina que da la prioridad al conocimiento directo de ciertos objetos o verdades considerados como fundamentales en sus campos respectivos, de objetos o verdades que se ven. La intuición produce visionarios como Platón o Descartes. La intuición

* Doctor en Filosofía, Profesor, Universidad de Estrasburgo, Francia.

sugiere un contacto directo con lo aprehendido, la operación del espíritu presenta el carácter de la inmediatez. Y esta percepción directa sería prolongada por la imaginación concreta y hasta ahí llegaría lo intuitivamente verdadero. El entendimiento, el intelecto o la razón, atados a las posibilidades del lenguaje y a la abstracción, serán para siempre, en la tradición intuicionista, un medio sospechoso de conocer.

Se supone que un conocimiento intuitivo no ocurre normalmente en etapas, no es gradual como una inferencia, como el conocimiento que presupone el lenguaje, como la aplicación de un algoritmo. Pero eso no es todo porque a veces en matemáticas se entiende también por intuición las operaciones de cálculo o lo que llega a entenderse fácilmente. En la intuición, lo aprehendido y la operación de la mente forman un solo proceso, tienen una sola forma. Por eso, en el conocimiento intuitivo no se plantea el problema de la verdad-adequación. Esta última presupone que la mente puede distinguir un objeto o un fenómeno. Es esta ausencia de distinción, la inmediatez o la facilidad de entendimiento que ha dado a los intuicionistas la confianza en tal forma de conocimiento. Todo conocimiento gradual y mediato, toda inferencia debe estar basada finalmente sobre verdades intuitivas.

Si el intuicionista se priva del lenguaje como medio de conocimiento, puede conocer muy pocas cosas. Hay un gran intervalo entre lo que afirmamos conocer y lo que conocemos efectivamente de manera intuitiva. ¿Cuál habría sido el contenido de la filosofía cartesiana si su método se hubiera basado en un principio único, la evidencia de la intuición? Una pobreza extrema. El segundo principio lo salva, la veracidad divina: ella le garantiza el paso a la ontología. Gracias a la veracidad divina, a la cual Descartes cree llegar gracias a su primer principio, las intuiciones pueden organizarse en un discurso, en un saber; la veracidad divina le permite creer que las sustancias, las leyes del movimiento, las relaciones lógicas corresponden a sus intuiciones.

Según los intuicionistas, que son típicamente pensadores espiritualistas y con tendencias a la soledad, la razón lingüística mata las esencias, mata la verdad. Las palabras tienen una significación fija que disimula la variabilidad intrínseca de los fenómenos, los signos analizan más allá de lo justo, generalizan y reducen. Otro intuicionista, Bergson, critica al lenguaje matemático su incapacidad de describir la duración que él consideraba como lo esencial de los fenómenos, y a juicio de Schopenhauer, las verdades mueren en el momento en que son encarnadas en las

palabras. Brouwer tuvo propósitos tan fuertes como esos contra el lenguaje, agregando que ya el hecho de dirigirse a alguien con la palabra, como yo lo hago ahora por ejemplo, es imponer una voluntad y atentar contra la libertad.

Veremos cómo algunas de estas características generales del intuicionismo se encuentran manifiestas primero en los pre-intuicionistas franceses y luego en el intuicionismo de Brouwer. La razón para proceder así es que Brouwer se consideraba un discípulo de la manera francesa de pensar que él contraponía a la manera alemana o formalista.

2. LOS PRE-INTUICIONISTAS

Evidentemente el trabajo de los pre-intuicionistas es admirable en calidad y en cantidad e imposible de resumir en pocas páginas. En este contexto me limito a exponer algunas de sus creencias precursoras a las de Brouwer sobre quien este trabajo está centrado. Antes de convertirse en una serie de tesis conscientes y positivas sobre la naturaleza de las matemáticas en las manos de Brouwer, otros matemáticos, reflexionando sobre el significado de sus trabajos, prepararon el camino con críticas dirigidas a las matemáticas clásicas. Por ejemplo, Kronecker consideraba que los trabajos de Cantor sobre los transfinitos y sobre la teoría de conjuntos no formaban parte de las matemáticas sino del misticismo. Según Kronecker, los enteros naturales, obra divina, son intuitivamente claros y por lo tanto aceptables, mientras que algunas teorías como la de los irracionales son obras humanas de las cuales hay que desconfiar. La crítica global de Kronecker afirma que muchos sectores de las matemáticas no proporcionan ni criterios ni métodos constructivos para determinar sus objetos, y esto en un número finito de pasos. Este tipo de críticas se encuentra sobre todo en los trabajos de lo que puede llamarse «la escuela francesa». Como Kronecker, Poincaré consideraba que los enteros naturales son evidentes y se burla de la complicada definición logicista del número uno por parte de Russell. Para Weyl, el enunciado “hubo estos tonos”; es muy inteligible en sí mismo y no hay necesidad de buscar un conjunto de tonos escuchados.

Pre-intuicionistas: así pueden llamarse algunos matemáticos como Poincaré, Baire, Borel, Lebesgue y Lusin. Prevalece en ellos una actitud crítica hacia la existencia

de entes que no resultan de una intuición, ¿qué quiere decir, no resultar de una intuición, o no ser evidente, o no ser inteligible? Quiere decir que no se sabe:

- cómo especificar una afirmación general,
- cómo nombrar un elemento de un conjunto,
- cómo obtenerlo de manera computacional, es decir, cómo pensar un mecanismo o una regla que forme el ente en cuestión.

Se trata de una exigencia que hará suya más tarde Brouwer.

Por ejemplo, en lo que concierne los enteros, se tiene la representación de ejemplares particulares más una operación, sucesor, que permite la formación de cualquier entero.

En lo que concierne los números irracionales, se tiene la representación de ejemplares particulares como la raíz cuadrada de 2, o π . O bien se poseen algoritmos cuya aplicación da una respuesta a problemas de decisión o de calculabilidad en un número finito de etapas, o bien se sabe que una colección posee alguna propiedad invariante cuando se cambia de elemento. Una vez que esta actitud crítica de los pre-intuicionistas se verá completada con elementos positivos y unificados se podrá hablar en sentido estricto de la doctrina intuicionista: es lo que hizo Brouwer.

Un intuicionista, en el sentido filosófico o matemático del término, hace hincapié en el hecho que no hay conocimiento sin contacto concreto con lo que se describe o afirma, sin prueba, y que el sujeto encargado de eso es un ser humano cuyos órganos sensoriales e intelectuales son limitados o finitos. Así, el método por excelencia, en las ciencias naturales como en las matemáticas, tiene que ser la inducción puesto que todo contacto de una mente finita con algo no puede ser sino parcial, local, y de ahí se intentará generalizar. Nuestro horizonte es siempre finito. Se entiende entonces que al menos en el caso de los pre-intuicionistas la ocasión de la bifurcación matemáticos clásico por un lado e intuicionistas por otro haya sido dada por la discusión alrededor del infinito, un tema que nos viene por lo menos de Zenón de Elea y cuyas paradojas nos han obligado a distinguir los aspectos físicos y matemáticos del problema.

De hecho, una confusión de ambos terrenos tendería a dar la razón a los que

quieren excluir toda alusión al infinito. Tanto la química de fines del siglo XIX con su tabla de elementos como la física de hoy tienen fuertes argumentos a favor del carácter discontinuo de la materia. Pero una constante de los matemáticos es considerar que el infinito no tiene nada que ver con los objetos finitos de nuestro mundo sensible, que el infinito es una idea de la razón sin medida común con los objetos sensibles finitos, que el infinito es y que nada, excepto él mismo, puede dar una idea de sí mismo. No solamente el infinito y lo finito serían de una especie diferente, sino que se excluirían mutuamente.

Desde hace mucho tiempo el infinito ha sido parte de las matemáticas sin que su utilización se considere chocante. En el álgebra elemental aparece bajo la forma de una cantidad finita que habría que dividir por cero. ¿Qué sentido puede tener tal operación, cómo utilizar un divisor inexistente? Aparentemente el problema no tiene solución razonable. Pero el matemático no se deja detener por tal imposibilidad y quisiera encontrar una solución. A medida que el divisor disminuye, el cociente aumenta; y si el divisor se encuentra por debajo de todo grado de pequeñez, el cociente se eleva sobre todo grado de cantidad. Así la división de un número por cero significa que ninguna cantidad finita soluciona el problema, y así se afirma que la solución es el infinito.

El matemático descubre un sentido a las operaciones o a las cosas que parecían absurdas. En la geometría plana euclidiana, el punto de encuentro entre dos rectas paralelas está situado en el infinito. Se usa también el símbolo del infinito en el estudio de la elipse: si la distancia entre los centros es infinita, se infiere que la elipse tiene un solo centro y que se trata no de una elipse sino de una parábola. Si un polígono tiene un número infinito de lados, se infiere que el polígono es una curva.

Estos ejemplos ilustran lo que decía antes, que entre lo finito y el infinito hay una diferencia cualitativa: un polígono es una cosa, una curva es otra de naturaleza diferente. Lo finito puede aproximarse al infinito, pero nunca lo alcanza. Por eso hay una diferencia importante entre la noción de límite del lenguaje corriente y la noción matemática: en la vida corriente, un límite puede pasarse o al menos tocarse, mientras que en matemáticas, en los casos no triviales, no solamente el límite no puede pasarse sino que ni siquiera puede tocarse. Esta observación nos servirá más adelante para evaluar, al menos parcialmente, lo que los intuicionistas dicen sobre el infinito.

Sin la imaginación racional las matemáticas no existirían; quiero decir sin esta operación mental que consiste en no querer dejar jamás sin solución un problema bien planteado. Por ejemplo, es así como se han inventado o descubierto los diferentes tipos o conjuntos de números. Y esta imaginación racional, una vez que ha hecho el trabajo de aceptar un nuevo ente en su ontología, vuelve a los mismos algoritmos, repite lo que ya sabe y domina: la suma y la resta, la multiplicación y la división, la potencia y la raíz, la relación exponencial y la logarítmica, relaciones o funciones circulares o trigonométricas, elípticas, etc. La imaginación aquí es racional y necesaria, excluye lo arbitrario. Esto se ve en las aplicaciones, en la generatividad de las matemáticas. Piénsese por ejemplo en el cálculo infinitesimal.

La imaginación nos ha dado el infinito que aparece en los números irracionales (los inconmensurables), es decir el continuo obtenido aplicando a los números racionales, las fracciones, la idea de una serie infinita de alteraciones de amplitud cada vez menos sensible, los infinitos introducidos con los cálculos diferencial e integral por Leibniz y Newton, las series infinitas convergentes y el transfinito. Ahora bien, varios matemáticos consideran que una constante en la historia de los modos de aparición del infinito es que éste se ha mostrado jabonoso para la lógica, quiero decir que la lógica se ha visto cada vez en la incapacidad de dar cuenta de manera satisfactoria de los razonamientos en los que aparece el infinito. Por eso, no hay que extrañarse si las discusiones sobre la naturaleza del infinito y las maneras de concebirlo están en el centro de las filosofías de las matemáticas recientes y constituyen un lugar privilegiado para discutir las tesis intuicionistas.

Según Cantor, existe una infinidad no numerable de números, y Lebesgue observa que Cantor no se da los medios de nombrar tal infinidad. Se muestra solamente, continúa Lebesgue, que cada vez que se tendrá una infinidad numerable de números, se podrá definir un número que no forma parte de esta infinidad (la palabra definir quiere decir: nombrar una propiedad característica de lo definido). Una existencia de esta naturaleza puede ser utilizada en un razonamiento y de la siguiente manera: una propiedad es verdadera si el hecho de negarla lleva a admitir que se pueden ordenar todos los números en una serie numerable. Creo que no puede intervenir sino de esta manera.

Y Baire escribe: Para mí, el progreso en este orden de ideas consistiría en

delimitar el dominio de lo que es definible. Y, a fin de cuentas, a pesar de las apariencias, todo debe reducirse a lo finito. He aquí un tercer testimonio de Borel: Cuando se trata del infinito que no es numerable, creo constatar que todos los discursos por medio de los cuales se ha intentado despertar en mí la idea no han sugerido otra cosa a mi imaginación que el infinito numerable; los razonamientos sobre los símbolos alephs conservan para mí un carácter solamente abstracto que no corresponden a ninguna realidad. En su artículo Intuicionismo y Formalismo de 1912 Brouwer no dirá otra cosa.

Una de las reglas mencionadas por Poincaré en su polémica contra Russell establece que nunca hay que perder de vista que toda proposición sobre el infinito debe ser la traducción, el enunciado abreviado de proposiciones sobre lo finito. (*la logique de l'infini in dernières pensées*) Russell adopta el punto de vista realista del matemático clásico, es decir, aquél que atribuye a la lógica un valor absoluto y universal, y este valor sería el mismo tanto en el dominio de los entes finitos como en el de los infinitos. Por ejemplo, en su artículo sobre los axiomas de la geometría publicado en la Revista de Metafísica y de Moral en 1899, Russell escribe que todo lo que se puede descubrir mediante una operación debe existir independientemente de esta operación. América existió antes que Cristóbal Colón y dos cantidades de la misma especie son necesariamente iguales o desiguales antes de ser medidas. Como Russell, Hadamard (que en esto es una excepción en el ambiente francés de la época), toma la posición contraria a la de los pre-intuicionistas. A la pregunta: ¿puede demostrarse la existencia de un ente matemático sin definirlo? Hadamard responde afirmativamente, y escribe: Que nos sea imposible, por lo menos actualmente, nombrar un elemento de un conjunto infinito, es verdad. Pero eso es un problema para ustedes (quiere decir, para los intuicionistas), no para mí. (Esta cita, así como las otras de Baire, Lebesgue y Borel están sacadas del libro de Emile Borel: *Lecciones sobre la teoría de funciones*).

3. EL INTUICIONISMO DE LUITZGEN EGBERTUS JAN BROUWER (1881-1966)

Una vez que Brouwer estudió las matemáticas de los pre-intuicionistas y aquella de los formalistas, sacó la conclusión siguiente que determinó su orientación filosófica y matemática: una parte de las matemáticas es autónoma, es decir, exacta,

absoluta, confiable y universalmente reconocida sin tener necesidad ni de la lógica ni del lenguaje. Es lo que ocurre, por ejemplo, con la teoría elemental de los enteros naturales, con el principio de la inducción completa y con otras partes del álgebra. En cambio, la parte que no es autónoma y que requiere de la lógica y del lenguaje es la teoría del continuo y de los números reales. En este caso, se requiere una prueba de la existencia no-contradictoria de tales entes.

Según Brouwer, las dos tesis principales de la filosofía intuicionista, o actos del intuicionismo, son los siguientes: El primer acto del intuicionismo, escribe Brouwer (*Historical Background, Principles and Methods on Intuitionism in South African Journal of Science, Oct.-Nov., 1952, p.142*) separa completamente las matemáticas del lenguaje matemático, y en particular de los fenómenos del lenguaje descritos por la lógica teórica, y reconoce que la matemática intuicionista es esencialmente una actividad mental desprovista de lenguaje cuyo origen se encuentra en la percepción del movimiento del tiempo, es decir, de la separación de un momento de vida en dos cosas distintas, una de las cuales hace surgir la otra pero queda retenida por la memoria. Si se le quita a la *dou*-unidad así obtenida toda cualidad, queda la forma vacía del substrato común a todas las dos-idades. Tal substrato común, tal forma vacía, constituye la intuición básica de las matemáticas. El segundo acto del intuicionismo o segunda tesis, es constructivo y prolonga lo que el primer acto hace posible; así el autodesarrollo de la intuición primordial del paso del tiempo es la base de la construcción de los números naturales y del continuo intuicionista.

Uno de los artículos principales de Brouwer intitulado: *Conciencia, filosofía y matemáticas* se terminan así: Espero haber mostrado que el intuicionismo por una parte hace de la lógica una ciencia más sutil, y que por otra no la reconoce como fuente de verdad. Espero haber mostrado también que la matemática intuicionista es una estructura interior y que la investigación de los fundamentos de las matemáticas es una búsqueda interior con consecuencias importantes, esclarecedoras y liberadoras incluso en áreas del pensamiento más allá de la matemática. (*10th International Congress of Philosophy, Amsterdam, 1948, Proceedings I, Fascicule 11, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1949, pp. 1243-9*). Lo que Brouwer implica es que lo colectivo, lo exterior, limita la libertad.

Para Brouwer la matemática es una arquitectura interior, mental. Kant había

visto en el tiempo y en el espacio, que son para él formas puras *a priori* de la sensibilidad, la posibilidad de los juicios sintéticos *a priori* de las matemáticas. El espacio es la condición de la geometría, el tiempo, la condición de la aritmética. El intuicionismo brouweriano puede ser asociado en parte a la idea de Kant porque para el filósofo el tiempo es la forma del sentido interno, pero, diferente a Kant, Brouwer piensa que se puede reducir la geometría al álgebra, como lo mostró Descartes.

Brouwer escribe: La conciencia en su morada más profunda parece oscilar lenta, involuntaria y reversiblemente entre el reposo y la sensación. Pareciera que sólo el estado de sensación hace posible el fenómeno que marca el comienzo del movimiento del paso que acabo de mencionar, y que es un acto del tiempo. Gracias a la acción del tiempo (o al golpe del tiempo según algunos traductores) una sensación presente hace surgir otra sensación presente, de manera que la conciencia preserva la primera de estas sensaciones en tanto que sensación pasada y que además, gracias a esta distinción entre el presente y el pasado, se aleja de una y de otra, y también del reposo, para llegar a ser un intelecto (Ibid).

En su Discurso Inaugural de la Universidad de Amsterdam en 1912 Intuicionismo y Formalismo, Brouwer dice que la intuición de la dos-edad, la intuición fundamental de las matemáticas, crea no sólo los números uno y dos sino también todos los números ordinales finitos, puesto que uno de los elementos de la dos-edad puede pensarse como una nueva dos-edad, proceso que puede repetirse indefinidamente y cuya continuación engendra el número ordinal infinito más pequeño, ω . Finalmente, esta intuición fundamental de las matemáticas donde se unen lo conexo y lo separado, lo continuo y lo discreto, da lugar inmediatamente a la intuición del continuo lineal, es decir, del entre, que no se agota con la interposición de nuevas unidades, y que por lo tanto no puede nunca pensarse como una simple colección de unidades.

Las ideas que acabo de describir son capitales para entender a Brouwer y podemos ordenarlas de la manera siguiente: Primero, la conciencia estaría en un estado de indiferencia. Segundo, el paso del tiempo la saca de esta indiferencia. Tercero, al salir de la indiferencia, se producen sensaciones; la conciencia oscila reversiblemente entre las sensaciones. Cuarto, al interior de las sensaciones podemos distinguir el sujeto del objeto. Quinto, el paso del tiempo reúne las sensaciones distintas y la infinidad de lo que está entre estos límites (las sensaciones distintas son los límites

del intervalo temporal). Sexto, la percepción de la dos-edad abstracta (es decir, la percepción exenta de toda cualidad afectiva), es la intuición primordial, el origen de la actividad matemática. Séptimo, esta dos-edad engendra por iteración la multiplicidad del mundo de la representación y del devenir, los enteros naturales y los números ordinales finitos. Octavo, la intuición del continuo es posible porque la segunda parte de la dos-edad presupone el recuerdo de la primera, ambas unidades se sostienen o contienen mutuamente. Finalmente, la reflexión permite la introducción del intelecto que separa y con él la individuación.

Estos párrafos sobre el nacimiento de las matemáticas son metafísicos, o si se quiere, metafísicamente raros, sin conexión con el pensamiento occidental, y eso puede explicar que incluso algunos de los que ven el intuicionismo brouweriano con simpatía no quieran retener sino los aspectos lógicos de su doctrina desarrollados en gran parte por sus discípulos. Como hecho curioso, quisiera hacer notar que varias páginas del artículo *Filosofía, conciencia y matemáticas*, capitales para entender a Brouwer, fueron dejadas de lado en la edición hecha por Putnam y Benacerraf en el volumen colectivo *Filosofía de las matemáticas*, como si la metafísica fuera un equipaje inútil para el profesional. Recientemente, en algunos textos anglosajones (por ejemplo en los de M. Dummett), se considera el intuicionismo casi únicamente desde un punto de vista lógico: lo esencial de la discusión actual ha llegado a ser la revisión de las leyes de base de la lógica.

Muchas veces se puede distinguir nítidamente entre las creencias no científicas que han dado origen a una hipótesis o a un método, y el resultado científico positivo. Si la ciencia es una colección de resultados, éstos pueden utilizarse sin preocuparse de su génesis; pero si la ciencia es una búsqueda de inteligibilidad, entonces el aparato metafísico ya no es tan dispensable. La comprensión de la metafísica de Brouwer permite apreciar mejor lo que quiso hacer así como su comportamiento dentro y fuera de las matemáticas; de manera más específica, como lo veremos, permite elucidar malentendidos acerca de su supuesto solipsismo o subjetivismo. La obra de Brouwer muestra que armonizó las matemáticas con su metafísica.

4. INTUICIÓN Y CONSTRUCCIÓN

No hay que ver en la intuición o en la construcción algo místico porque es, en las palabras de Arend Heyting, «la facultad de considerar distintamente algunos conceptos y conclusiones que intervienen normalmente en nuestros pensamientos habituales». La idea de construcción viene de las operaciones de la geometría (utilización de la regla y del compás) como aquéllas efectuadas por los geómetras de la Antigüedad: se dibujan figuras y se buscan enseguida las propiedades significativas. Piénsese en el método exhaustivo empleado por Arquímedes para medir la longitud de la circunferencia.

Recordemos que para los geómetras de la Antigüedad la construcción no es criterio de existencia, contrario a lo que constatamos hoy. Desde la Antigüedad los procedimientos constructivos por excelencia son los algoritmos. Una cosa es demostrar la existencia pura de un objeto y otra, distinta, es construir, dar teoremas que muestran cómo se obtienen los objetos. Para Brouwer, la intuición no es exactamente lo mismo que la aplicación de un algoritmo porque lo último puede hacerse mecánicamente, mientras que la intuición exige la comprensión.

Jean Largeault se dio cuenta de algo importante, que la paradoja de Brouwer consiste en haber querido unificar, bajo el nombre de intuición, el análisis del geómetra y la síntesis demostrativa o algebraica, sometiéndola a la generatividad formal de esta última a criterios de visión directa, «gracias a los ojos del espíritu». Sin construcción efectiva, el concepto de existencia es absurdo. La teoría del conocimiento de Brouwer tiene elementos que nos recuerdan el empirismo, la verdad baja del pedestal metafísico al epistemológico: la verdad es la verificación. Las únicas verdades que existen, dice el matemático, son aquellas de las cuales hemos tenido la experiencia (Brouwer).

Brouwer acepta, porque se lo puede construir intuitivamente, el número ordinal infinito más pequeño, ω . Este número es numerable. Los conjuntos de la misma potencia que el número ordinal ω son numerablemente infinitos y su potencia es el Aleph_0 , la potencia infinita más pequeña. Esta es la única potencia infinita admitida por los intuicionistas. Pero el concepto de número ordinal numerablemente infinito no da el derecho de crear el conjunto de todos los números ordinales numerablemente infinitos, este último no tiene ningún significado claro. Se sigue que el Aleph_1 no

tiene significación clara, lo que implica a su vez que no se tiene derecho a afirmar que el \aleph_1 sea superior al \aleph_0 . De la imposibilidad de construir un conjunto de números ordinales numerablemente infinitos el cual se pueda probar que tenga una potencia inferior a la del \aleph_1 y mayor que la del \aleph_0 , no se puede inferir que el \aleph_1 sea el segundo ordinal infinito más pequeño –la proposición no tiene sentido intuicionista (ver Brouwer, Intuicionismo y formalismo).

¿Qué incluye exactamente la intuición inteligible según Brouwer? Lo hemos visto al considerar los pre-intuicionistas: cómo especificar una afirmación general, cómo nombrar un elemento de un conjunto, cómo pensar una regla que forme el ente en cuestión. Pero eso no es todo: si los métodos intuicionistas utilizan los conceptos abstractos de predicado, propiedad, prueba, función y especie o clase, entonces estos métodos van más allá de lo intuitivamente evidente. Por la misma razón Hilbert pensaba que la inducción no es intuitivamente evidente. Estas dificultades explican, por lo menos en parte, el sentido del trabajo de un seguidor de Brouwer como Heyting quien en su lógica intuicionista transforma los fundamentos del intuicionismo para asentar la doctrina en una base menos estrecha.

5. LA VERDAD Y EL TERCERO EXCLUIDO

Un objeto matemático existe, según Brouwer, si puede ser construido a partir de la intuición primordial. No basta con que la concepción de un ente matemático esté exenta de contradicción, no basta con que se lo pueda obtener mediante la aplicación de los principios de la lógica tales como la ley del tercero excluido y la doble negación. Por ejemplo, Cantor creía en la realidad objetiva de los números transfinitos y en su ausencia de contradicción. Si es falso que algo no es verdadero, entonces aquello es verdadero según Aristóteles, la lógica clásica bivalente y el sentido común al menos en Occidente (aparentemente en Oriente las cosas no son así). Se trata de la base de la demostración por reducción al absurdo, procedimiento benéfico en la ampliación del dominio de las matemáticas. Sin embargo, uno de los puntos principales de la filosofía de Brouwer es que un argumento por reducción al absurdo no constituye un medio para construir efectivamente la entidad demostrada.

Por eso, comenta Brouwer, la física aristotélica que utiliza el tercio excluso

no es válida *a priori* y debe verificarse por la experiencia. Recordemos que Leibniz, entre otros, pensaba que una de las diferencias entre los entes matemáticos y los físicos es que para afirmar la existencia de los primeros es necesario y suficiente que sean no-contradictorios, mientras que los entes físicos necesitan, además, una razón suficiente. Brouwer no aceptaría esta diferencia afirmando que los entes matemáticos necesitan, ellos también, una razón suficiente para existir.

De la falsedad de la inexistencia de un objeto no se puede inferir, en lógica brouweriana, que el objeto existe. Lo que Brouwer quiere es poder controlar la existencia que se afirma, por eso el principio del tercero excluido no es problemático cuando se trata del conocimiento de propiedades definidas de colecciones finitas, pero puesto que la misma claridad no existe en el dominio de las colecciones infinitas, ahí su uso incontrolado es ilícito. Según Brouwer, la creencia en la aplicación universal del tercero excluido puede explicarse históricamente en tres pasos: primero, la lógica clásica fue abstraída de las matemáticas de los subconjuntos de un conjunto finito definido, es decir, de un conjunto del cual se exhiben sus elementos; segundo, se le dio a esta lógica una existencia *a priori* independiente de las matemáticas, y tercero, de manera ilícita se aplicó esta lógica a las matemáticas de los conjuntos infinitos.

El matemático intuicionista exige que a toda forma discursiva o lingüística corresponda una idea que la conciencia pueda observar. El uso generalizado del tercero excluido presupone erróneamente que toda proposición es necesaria y eternamente verdadera o falsa. Eso presupone erróneamente el carácter completo, acabado y determinado de todos los conceptos y sistemas de conceptos. Brouwer creía en la libertad y en la contingencia de por lo menos algunos de los entes matemáticos (piénsese por ejemplo en el axioma de selección); creía también que algunos entes matemáticos, como el infinito potencial, tienen propiedades que evolucionan, por lo que no todo ente tiene un cierto número de propiedades fijas de una vez y para siempre.

Lo verdadero es lo verdadero conocido, mientras que para un realista platónico, todo enunciado bien formado es eternamente verdadero o falso (recordemos la afirmación de Russell: Todo lo que se puede descubrir mediante una operación debe existir independientemente de esta operación). De acuerdo al intuicionista sólo tenemos el derecho de afirmar que hay entes cuando están debidamente contruidos, mientras que los que no cumplen con este requisito son seres aparentes, insubstanciales. Según

Brouwer, las verdaderas matemáticas son aquellas que están bien construidas, y en ese caso son necesariamente consistentes. Por eso el matemático holandés no prestó interés a los teoremas de Gödel, en particular al segundo que afirma que lo que no se puede probar es que un enunciado de una teoría pueda expresar su consistencia. En sentido estricto, desde el punto de vista intuicionista una prueba formal de consistencia está de más.

6. EL CONTINUO Y EL DEVENIR

Brouwer, como Knonecker, reconoce a los enteros naturales 1, 2, 3... un estatus especial: su formación es paradigma de la construcción mental. La base es la idea de unidad y el poder operatorio de la mente, lo que nos trae a la mente, entre otros, a Kant y a E. Le Roy. Se puede repetir la unidad y el paso de n a $n+1$ conduce a los conjuntos infinitos. Desde Cantor y Dedekind los conjuntos se caracterizan por la consideración simultánea de una infinidad de elementos, por lo que el infinito llega a ser concebido como una totalidad acabada en acto. Brouwer modifica la noción de conjunto considerando en cambio los conjuntos en devenir e introduce la noción de secuencia de selección de números racionales. Tal secuencia está formada por un segmento inicial finito y por una regla que indica cómo continuar la secuencia, pero la regla puede dejar espacio para una cierta libertad en la selección de los elementos sucesivos. Brouwer admite sólo aquellas secuencias que están determinadas por su regla y por un número finito de elecciones efectivas. Estas nociones le permitieron probar, contrario a las matemáticas clásicas, que toda función completamente definida en un intervalo de números reales es uniformemente continua.

El infinito de Brouwer es un medio en devenir libre; el infinito es solamente posible como el infinito potencial de Aristóteles, «aquello fuera de lo cual siempre hay algo». Según Brouwer, el número real que es el individuo con el cual se forma el continuo, no tiene que ser definido por un conjunto sino por una secuencia de números naturales. El matemático holandés muestra que muchas veces cuando las proposiciones del análisis tradicional son correctamente interpretadas, concierne simplemente la totalidad de los números naturales, y cuando eso no ocurre, entonces la noción de secuencia cambia de significado: ya no se trata de una secuencia determinada por una u otra ley –y esto es muy importante– sino que se trata de una secuencia creada paso

a paso gracias a actos libres de selección, por lo que la secuencia permanece en un estado de devenir constante. La secuencia selectiva en devenir representa el continuo, mientras que la secuencia determinada al infinito por una ley representa el número real individual que cae en el continuo.

Reflexionando sobre la inteligibilidad del continuo, Jean Largeault observa lo siguiente: las entidades pueden ubicarse por lo menos en una de estas dos clases: en una de ellas estarían el punto, lo sólido, lo finito, lo discreto, la esencia, lo racional, mientras que en la otra clase encontraríamos el continuo, lo fluido, lo indefinido, la imaginación, la percepción del movimiento, el tiempo que transcurre entre dos instantes, la existencia, etc. La ventaja de la concepción atomista del continuo es que permite aprehender los puntos individuales, pero el precio es elevado ya que se sacrifica la comprensión del flujo del continuo.

7. INTUICIONISMO Y OBJETIVIDAD

La sofisticación del intuicionismo de Brouwer hace que no puedan aplicársele tal cual las objeciones que tradicionalmente se han presentado contra los intuicionistas.

Veamos cuáles han sido o podrían haber sido estas objeciones, y si valen o no contra él desde el punto de vista del matemático. La encuesta se complica porque aparentemente, por motivos de polémica o para asegurarse que su originalidad no pasaba desapercibida, Brouwer se habría expresado algunas veces de un modo que no refleja fielmente su pensamiento. Mi trabajo no consiste aquí en decidir, sobre el fondo las cosas, quien, Brouwer o sus críticos, tiene razón. Aunque eso es importante en sí, nos llevaría a una larga discusión que no puede tener lugar en nuestro contexto actual. Me limito entonces a exponer las críticas y las respuestas que Brouwer puede dar.

1) El argumento contra el solipsismo. El solipsismo sería la consecuencia del carácter subjetivo o ideal del conocimiento; los otros yoes de los cuales se tiene una representación son ficciones, seres sin existencia independiente.

Respuesta:

Para Brouwer la noción de una realidad en sí no construida, de una realidad

independiente de la conciencia, no tiene sentido, o bien, en el mejor de los casos, designa la representación de una conciencia universal. Tal vez, después de todo, ¿por qué descartar la posibilidad que en la mente del genio la intuición y la realidad en sí se unan?

El componente principal de su metafísica es que existe un solo Yo, una sola conciencia universal. Por eso no puede siquiera decirse que la filosofía de Brouwer sea solipsista. Afirmar, como lo hizo Brouwer en su Tesis de 1907 Sobre los fundamentos de las matemáticas, que los otros yoes y que incluso sus propios estados mentales futuros son ficciones, no es declararse solipsista. El solipsismo es la idea que la existencia de las conciencias diferentes de la mía no puede ser demostrada. Se piden argumentos.

Así, el solipsismo presupone la multiplicidad de conciencias, pero según Brouwer esta última idea es absurda: la conciencia no es algo que se pueda multiplicar ni dividir. Hemos visto que lo que se experimenta cuando la conciencia está en su última morada es el todo indiferenciado. El intelecto, la razón y el lenguaje, fuente de diferenciación y de individuación, surgen después, por decirlo así, en un segundo momento. Esta metafísica especial de Brouwer neutraliza el uso corriente de los términos subjetivo y objetivo y los convierte en términos de utilización difícil cuando se habla de su filosofía.

2) El argumento de la falibilidad del yo individual. Se rechaza a menudo de manera implícita la existencia del Yo universal brouweriano. El yo no sería otro que el yo particular de cada uno de nosotros. Este yo, ya no sería infalible, por lo que habría necesidad de verificar la evidencia interna de las matemáticas intuicionistas con los medios del lenguaje y de la lógica. Ellos permiten el consenso, la verdad intersubjetiva.

Puede agregarse la objeción más fuerte que simplemente no existe una facultad intuitiva. Por ejemplo Kant criticó a Descartes el hecho de creer en tal facultad. Kant afirmó además que la intuición sin conceptos es ciega y que el concepto sin intuición es vacío.

Respuesta:

En cuanto a la verificación externa tan apreciada por los científicos: Brouwer

no tenía ninguna estima por este tipo de objetividad, el consenso, la verdad intersubjetiva, dependiente del lenguaje y de la multiplicidad de intelectos. Esta objetividad no puede ser sino el ropaje externo de actos conscientes. Por supuesto Brouwer rechazaría a su vez la afirmación de Kant, admitiendo que es verdad que el concepto sin intuición es vacío, pero no aceptaría la otra cláusula, que la intuición sin concepto es ciega –ella es lo más lúcido que el hombre puede tener.

3) El argumento de la subordinación de las verdades intuitivas a las verdades eternas. Se trata, por ejemplo, de las críticas que Leibniz y Kant dirigieron contra Descartes: Leibniz comienza el conocimiento con las verdades del ser que son para él el principio de no-contradicción y el principio de razón suficiente. Según estos principios, incluso la teología sería lógica, las verdades eternas serían no-substanciales a Dios, y las verdades intuitivas, que deben ser clasificadas con las verdades contingentes, estarían subordinadas a las verdades eternas. La verdad estaría en las cosas antes de estar en la mente.

Respuesta:

Quedan algunas dudas para saber si Brouwer niega la existencia de una realidad platónica; sucede que lo que enfatiza no es que ella no exista. En cambio está claro que Brouwer piensa que tal mundo es ininteligible, que no tiene sentido, en la medida en que no es intuitivo o no está bien construido. El comienzo intuicionista del conocimiento transforma la verdad metafísica en verificación intuitiva.

4) El argumento de la multiplicidad de informes diferentes de la supuesta misma evidencia interna. ¿Cómo podría el intuicionista, sin el recurso al lenguaje y a la lógica que fijan las ideas para examinarlas, distinguir la mera creencia en el carácter evidente de una introspección de la verdadera evidencia? Considérese por ejemplo la afirmación el círculo cuadrado no puede existir. Tal proposición es un teorema para Brouwer. Stephen Körner en *The Philosophy of Mathematics* hace notar que Brouwer lo describe como una construcción que consiste en suponer primero que hemos construido un cuadrado que es al mismo tiempo un círculo, para derivar luego una contradicción a partir de la suposición. Pero una supuesta construcción que es además irrealizable es una cosa, y una construcción efectiva es otra. Por otra parte hay intuicionistas, que Körner no menciona, que niegan que una suposición irrealizable tenga sentido para ellos. Así, los informes de la experiencia interna evidente pueden

ser diferentes entre intuicionistas, lo que tendería a quitarle a la evidencia su carácter evidente. Uno puede preguntarse, de manera análoga, si no hay incoherencias en los informes que describen las propiedades del Yo universal.

Respuesta: Ninguna, que yo sepa.

Excursus. Otra manera de hablar de la objetividad en matemáticas consiste en decir que son objetivas al menos en la medida en que, asociadas a la física matemática o a las ciencias naturales, constituyen una descripción adecuada del mundo sensible. Pero el matemático holandés no quería saber nada de la aplicación. Para él, las matemáticas son un arte espiritual, un fin en sí mismas, el resultado de la creatividad del sujeto universal. Por eso además las matemáticas no tienen necesidad de fundamentos. En tanto que puras, las matemáticas constructivistas son superiores a las clásicas a causa de su mayor evidencia, de su mayor inteligibilidad.

Sin embargo, desde el punto de vista de la aplicabilidad, las matemáticas clásicas, más simples que las intuicionistas, pueden ser preferibles. Weyl menciona en este contexto una razón negativa, el hecho que de todas maneras no podemos tener una evidencia interna de la materia. Hilbert ha mostrado la manera de utilizar las matemáticas clásicas en las ciencias naturales: puede pensarse que algunos entes como los números infinitos no-numerables son objetos ideales, de hecho inexistentes pero útiles para simplificar el cálculo. Pero hay que hacer notar que tal estrategia revela una visión positivista de la ciencia. Para un realista, al contrario, es inconcebible tener una teoría física explicativa, es decir, verdadera, cuya parte matemática sea ficticia. La verdad de la teoría física implica la verdad de la parte matemática.

En suma, Brouwer podría responder de manera satisfactoria a casi todas las críticas y, lo que es interesante, manteniendo su punto de vista rígido en un período en que muchos, conscientes de la dificultad de los problemas, son eclécticos.

8. BROUWER ET GÖDEL

El gran lógico, con otros como Weyl, forma parte de un círculo restringido de grandes científicos o filósofos que comprendieron a Brouwer. Por supuesto Gödel no puede aceptar tal cual el intuicionismo porque un principio estricto de verificación es

incompatible con el platonismo. Gödel reconoce que para Brouwer las matemáticas no son arbitrarias; ¿cómo podrían serlo si expresan la esencia de la mente? Cuando Brouwer dice que los objetos matemáticos son actos, que las matemáticas son una creación del espíritu, no quiere decir creación de la nada: la dos-edad es el material con el que se obtienen los números mediante la iteración. Según Brouwer, el matemático ni determina ni decide lo que se crea. En vez de hablar de creación, sería más preciso hablar de fabricación, dice Gödel, y en ese sentido el trabajo del matemático es creativo como una constructora de automóviles lo es, haciendo algo a partir de algo (el ejemplo es de Gödel). Uno puede preguntarse si los críticos del intuicionismo que argumentan contra Brouwer han entendido bien lo que no pasó desapercibido a Gödel, es decir, que Brouwer hace lo posible por evitar lo arbitrario y que su sujeto pretende ser universal.

Los matemáticos están de acuerdo para reconocer que en su ciencia hay pruebas que tienen un carácter concluyente que manifiesta la objetividad y la universalidad de las matemáticas. Ahora bien, ¿esta objetividad, es solamente un consenso, o va más allá para alcanzar la realidad en sí? Para Gödel como para Brouwer, habría que decir que las pruebas (con las restricciones necesarias en el caso de Brouwer) reflejan la realidad en sí. Pero hay una diferencia importante: según el platonismo de Gödel, podemos aplicar el principio del tercio excluido porque en el mundo de las Ideas los objetos y las propiedades están fijas, por lo que toda proposición, o bien es verdadera, o bien su negación lo es.

Según Gödel, la intuición capta entes que están hechos y en consecuencia tiene que existir en nuestro cerebro una estructura capaz de aprehender los entes matemáticos acabados. Encontramos aquí otra diferencia con respecto a Brouwer: para el intuicionista holandés el mundo matemático está en devenir y los entes que todavía no existen o que están en proceso de existir no tienen todavía todas las propiedades de manera fija, hay lugar para la contingencia, y por eso el tercero excluido debe manejarse cuidadosamente. Como lo dice en su artículo de 1908 sobre el carácter indigno de confianza de los principios de la lógica, la utilización sin precaución del tercero excluido presupone de manera ilegítima que todos los problemas matemáticos tienen solución. En cambio el mundo platónico está regido por la necesidad que hace que todo ente sea de una vez para siempre de una manera o de otra. Por eso Gödel cree que para cada concepto intuitivo vago existe un concepto eterno y exacto, y los

obstáculos para captarlo con esas propiedades se encuentran en nosotros, no en el concepto.

Lo anterior muestra claramente una vez más la influencia de la metafísica en la manera de concebir y de hacer matemáticas: el centro de la discusión aquí es el rol del devenir y del tiempo. Ambos están ausentes en el mundo platónico y presentes en el mundo de la conciencia brouweriano. Concluyamos entonces que Brouwer es tan objetivo como su visión metafísica se lo permite puesto que el sujeto creador es universal y no crea las matemáticas de la nada. Luego se ve en Gödel una diferencia más nítida entre lo epistemológico y lo ontológico: el devenir, los esfuerzos por llegar a la verdad, la construcción, la existencia de conceptos vagos, etc., deben ponerse del lado del sujeto del conocimiento que vive en el mundo sensible, mientras que la verdad habita en el mundo de las Ideas.

No significa en absoluto disminuir el valor del intuicionismo si se lo considera como el complemento epistemológico necesario del realismo.