

# La enseñanza del valor posicional y de la adición en dos columnas

Constance Kamii  
Linda Joseph



*En este artículo, la autora sostiene que la enseñanza de los mecanismos operativos de la adición, cuya automatización no por ser necesaria debe imponerse desde fuera, debe hacerse desde una comprensión por parte del niño de las reglas de esa convencionalidad, pactándola con ellos mediante procedimientos didácticos diferentes a los tradicionalmente utilizados en preescolar.*

La mayoría de los niños de segundo curso son capaces de escribir respuestas correctas a problemas de adición de dos columnas, sumando las unidades primero y procediendo como sigue:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 37 \\ +29 \\ \hline 6 \end{array}$$

Cuando se termina la clase de matemáticas y se entrevista a estos niños individualmente, la mayoría dice sin embargo que el 1 en 16 significa uno.

Hemos entrevistado a cientos de niños entre primer y tercer curso, y los maestros siempre se quedan asombrados cuando se enteran de que los niños habían dicho que el 1 en 16 significa uno. Describiremos nuestra entrevista de tal manera que el maestro pueda utilizar el mismo procedimiento cuando entreviste a los alumnos de otro maestro. Y sugerimos que no sea el maestro quien entreviste a sus propios alumnos porque el niño tiende a dar la respuesta que su maestro espera.

## LA ENTREVISTA

Cuando un niño viene a iniciar la entrevista, el entrevistador primero le enseña una tarjeta de  $3 \times 5$  con un «16» escrito en ella. Después de que

el niño dice que en la tarjeta pone «dieciséis», se le pide que cuente dieciséis fichas. El entrevistador entonces marca con un círculo a lápiz el 6 de 16 y pregunta, «¿Qué significa *esta parte* (el 6)? ¿Podrías mostrarme con las fichas lo que significa *esta parte* (el 6)?» Los niños de primero y de segundo no manifiestan ninguna dificultad hasta este momento de la entrevista.

El entrevistador entonces encierra en un círculo el 1 de 16 y pregunta «¿Y *esta parte* (el 1)? ¿Podrías mostrarme con las fichas lo que significa *esta parte* (el 1)?» (Debe mantenerse el término «esta parte»; evitando usar cualquier otra palabra.) Casi todos los niños de primero y segundo responden mostrando una sola ficha, a pesar de las horas de instrucción que han recibido acerca del valor posicional.

El entrevistador continúa indagando: «Me mostraste todas estas fichas (señalando las dieciséis fichas) para este número (encerrando el 16 en la tarjeta)... y éstas (señalando seis fichas) para esta parte (encerrando el seis en la tarjeta)... y esta ficha (señalando) para esta parte (encerrando el uno en la tarjeta). ¿Qué pasa con las fichas que quedan (señalando las nueve o diez fichas que no se usaron para mostrar las dos partes en la tarjeta)? ¿Tiene que ser así, o hay algo raro aquí?» Unos pocos niños dicen que hay algo raro, pero la mayoría dicen que no ven nada malo en lo que han dicho.

La proporción de niños que dicen que el 1 significa diez es generalmente del 0 % al final del primer curso, de 33 % al final de tercero, y de 50 % al final del cuarto curso. Sin embargo, al mostrar diez fichas para indicar que el 1 significa diez, muchos niños incluyen las seis fichas que usaron para explicar el significado de 6.

¿Por qué no entienden los niños en la escuela primaria el valor posicional? La respuesta a esta pregunta es complicada, y será más fácil de explicar después de haber presentado una manera nueva de enseñar el valor del lugar y la adición de dos columnas en el segundo curso, basada en la teoría de Jean Piaget. Este método, desarrollado en la Escuela de Hall-Kent cerca de Birmingham, Alabama, produjo al final del segundo año una mejor comprensión del valor posicional que el método tradicional del texto. El 66 % de los niños dijeron que el 1 en 16 significaba diez al final del año escolar 1987, y el 74 % dijeron que el 5 en 54 significaba cincuenta. Estos porcentajes son más altos de los que normalmente se encuentran al final de cuarto curso con la instrucción tradicional. (Huelga decir que no se incluyó la enseñanza del ítem de la prueba, y que a los niños nunca se les enseñó a que hicieran grupos de diez objetos. La educación en matemáticas de estos niños de segundo, consistió en juegos en preescolar y en primer curso y en juegos y discusiones en segundo curso, sin textos ni libros de trabajo.)

### **Una manera de enseñar el valor posicional y la adición de dos columnas**

Lo esencial de nuestro método de enseñanza basado en la teoría de Piaget, es fomentar el propio pensamiento natural de los niños y alentarles a intercambiar puntos de vista. Dos comentarios preliminares son necesarios.

Primero, a nuestros niños de segundo curso nunca se les enseñó el valor posicional ni la adición de dos columnas cuando estaban en el primer curso. Numerosas investigaciones han mostrado que difícilmente los niños

de este nivel entienden el valor posicional (Bednarz y Janvier, 1982; Brun, Giossi y Henriques, 1984; C. Kamii, 1985; M. Kamii 1980; Ross, 1986). Los niños de primero entienden «16» como 16 unidades (y no como 1 decena y 6 unidades).

Segundo, nunca enseñamos el valor posicional aparte de la adición u otra operación. Por razones que en breve aclararemos, nunca usamos objetos tales como palillos amarrados en paquetes en conjuntos de diez ni les pedimos a los niños que hagan círculos en los dibujos que hay en una página para mostrar cuántas decenas y unidades están representadas.

Hemos estado muy influenciados por Madell (1985), que afirmaba que cuando se anima a los niños a hacer adición de dos columnas a su propia manera natural, «*universalmente* proceden de izquierda a derecha». Por ejemplo, en el caso de

$$\begin{array}{r} 36 \\ +46, \\ \hline \end{array}$$

decía lo siguiente (p. 21):

Invariablemente, en un ejercicio como éste, los niños de siete y ocho años primero computan las decenas. Los detalles varían:

a) Algunos escribirán realmente un 7 en la columna de las decenas antes de mirar a la de las unidades. Estos niños vuelven atrás y borran.

b) Otros, habiendo obtenido 7 como la suma de 3 y 4, no escriben el 7 antes de controlar la columna de las unidades para ver si contiene otro diez.

c) Algunos de los estudiantes más aventajados controlan primero la columna de las unidades. Cuando observan (habitualmente por estimación) que hay más de diez unidades en la columna de las unidades, vuelven a sumar las decenas y escriben 8 antes de volver a las unidades y al último detalle del cálculo.

Este último proceso es lo más cerca que llegan los niños por sí solos al procedimiento estándar de derecha a izquierda. Aun para la adición de números de 3 y 4 cifras, donde un proceso de derecha a izquierda parecería más eficaz, los niños invariablemente prefieren la otra dirección.

En vez de usar bloques de base-diez como lo hizo Madell (por razones que daremos en breve), usamos la pizarra para anotar los ejercicios y para facilitar el intercambio de ideas entre los niños. El maestro escribe un ejercicio tras otro en la pizarra, tal y como sigue:

$$\begin{array}{r} 20 \\ +30 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ +12 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ +7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 5 \\ 2 \\ +5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 38 \\ +29 \\ \hline \end{array}$$

Los niños levantan la mano cuando ya tienen una respuesta. El maestro puede trabajar o con la clase entera o con pequeños grupos.

Cuando ya se han levantado la mayor parte de las manos, el maestro les pregunta a los niños individualmente y escribe todas las respuestas que dan. Después, el maestro, teniendo cuidado para no decir si una respuesta es correcta o equivocada, pide una explicación de cada respuesta o procedimiento inventado por los niños. Para

$$\begin{array}{r} 8 \\ +7, \\ \hline \end{array}$$

por ejemplo, un niño puede decir, «He restado dos de siete para hacer diez,» y el maestro escribe «-2» como sigue:

$$\begin{array}{r} 8 \\ +7 -2 \\ \hline \end{array}$$

Mientras habla el niño, el maestro escribe «+2 = 10» al lado del 8, y «= 5» al lado del 7 - 2. A veces el maestro tacha el 8, escribe «10» al lado, tacha el 7 y escribe «5» al lado, como sigue:

$$\begin{array}{r} \cancel{8} 10 \\ +\cancel{7} 5 \\ \hline \end{array}$$

El siguiente niño puede decir, «Siete más siete son catorce, así que uno más tiene que ser quince.» El maestro sigue y pregunta, «¿Alguien lo ha hecho de una manera diferente?» hasta que se agotan todas las posibilidades que los niños han encontrado.

Así se alienta a los niños a inventar todo tipo de caminos y a estar o no de acuerdo entre sí. Nunca decimos que una manera es mejor que otra, mientras tenga sentido, y cada niño es libre de adoptar la manera que sea mejor para él o para ella.

Con ejercicios tales como

$$\begin{array}{r} 36 \\ +46 \\ \hline \end{array}$$

todos nuestros niños prefieren comenzar con las decenas tal y como sostiene Madell. La mayoría dice algo del estilo de:

«Treinta y cuarenta son setenta.» (El maestro escribe «70» en un lado de la pizarra, o en cualquier sitio, como un instrumento de apoyo a la memoria.)

«Seis y seis son doce.» (El maestro escribe «12» otra vez en un lado.)

«Quita diez del doce y ponlo en el setenta, y son ochenta.» [El maestro borra el 1 de 12 y cambia el 7 (de 70) a 8.]

«Y dos más dos son ochenta y dos.» (El maestro escribe «82» debajo del ejercicio.)

Algunos niños dicen lo siguiente:

«Treinta y cuarenta son setenta.» (El maestro escribe «70» a un lado en cualquier sitio.)

«Seis y cuatro es otro diez; así que ya son ochenta.» [El maestro cambia el 7 (de 70) a 8.]

«Y dos más son ochenta y dos.» [El maestro cambia el 0 (de 80) a 2.]

Cuando un niño dice, «Tres y cuatro son setenta,» los niños o levantan la mano o gritan, «No es verdad» dependiendo de la regla convenida. Al principio del año sin embargo, el maestro es el único que dice, «Creía que tres y cuatro eran siete. ¿Cómo sacaste setenta?» (El maestro tiene cuidado en no ser la autoridad omnisciente que declara lo que es correcto y lo que es un error. El sólo está o no de acuerdo y trata de exponer otro punto de vista a partir de una base de igualdad.)

## DIFERENCIAS CON LA INSTRUCCION TRADICIONAL

Nuestra manera de enseñar el valor posicional y la adición de dos columnas difiere de la instrucción tradicional en los tres siguientes aspectos. Enumeraremos primero las diferencias y luego las explicaremos.

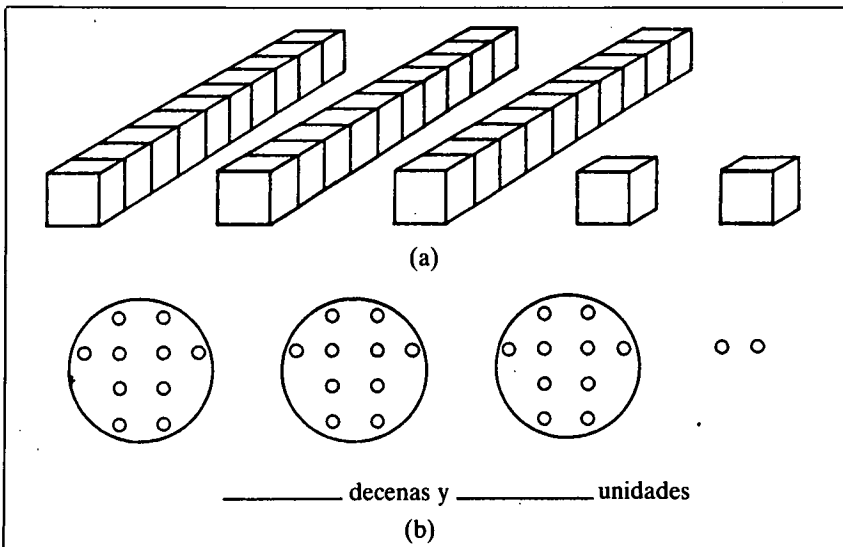
1. No enseñamos el valor posicional como una actividad separada con vistas a preparar a los niños para la adición de dos columnas.

2. No enseñamos ningún procedimiento ni algoritmo para la adición de dos columnas y, en vez de esto, alentamos a los niños a inventar muchas maneras diferentes.

3. Animamos a los niños a expresar su acuerdo o desacuerdo entre sí y a adoptar las ideas que tienen sentido para ellos.

1. No enseñamos el valor posicional por separado porque para el final del primer curso, todos los niños saben que  $10 + 10 = 20$ , y parece mejor animarles a emplear este conocimiento en ejercicios tales como  $10 + 12$ ,  $20 + 20$ ,  $15 + 5$ , y  $15 + 7$ . La instrucción tradicional del valor del lugar con paquetes de palillos, cuadernillos de tareas, etc., no ayuda porque da por sentado que el número y el valor del lugar pueden ser transmitidos al niño desde fuera con materiales y dibujos tales como los que mostramos en la figura 1.

FIGURA 1



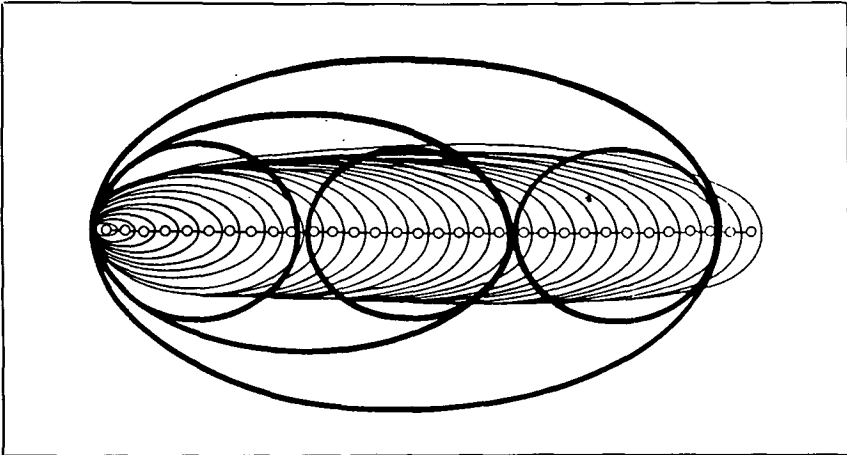
*Materiales usados típicamente en la instrucción de valor de lugar*

La comprensión de «decenas y unidades» requiere la construcción en la mente de uno de dos sistemas que funcionan de manera simultánea: uno de unidades y otro de decenas. Cada niño tiene que crear estos sistemas a través de su propia actividad mental, desde dentro. La figura 2 muestra el sistema de decenas creado mentalmente por el niño, sobre el sistema de unidades que había creado antes.

El sistema de unidades es una síntesis de dos tipos de relaciones creadas

por el niño: orden e inclusión jerárquica. La relación de orden se muestra en la figura 2 por la línea que conecta los treinta y dos elementos, y la inclusión jerárquica se representa por los óvalos que indican la inclusión mental de uno en dos, dos en tres, etc. Este sistema de unidades es el de los números naturales que la mayoría de los niños han construido por sí solos en el primer curso.

FIGURA 2



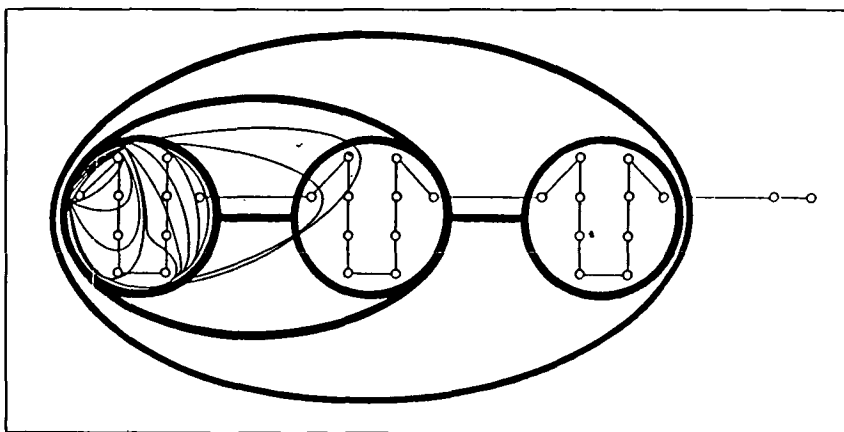
*El sistema de decenas que el niño construye sobre el sistema de unidades*

El sistema de unidades se pasa por alto completamente si tratamos de enseñar las «decenas y unidades» con materiales tales como los mostrados en la figura 1. La figura 3 es un intento de aclarar la inadecuada conceptualización que aparece en la figura 1(b). La disposición espacial de los treinta y dos objetos es la misma en ambos cuadros. En la figura 3, sin embargo, se incluye el sistema de unidades, que consiste en el orden y la inclusión jerárquica. El orden se representa con líneas rectas conectando los treinta y dos elementos, y la inclusión jerárquica se representa con trazos ovoides, hasta doce. El sistema de decenas se indica con líneas más gruesas. El sistema de decenas también implica dos tipos de relaciones, orden e inclusión jerárquica. Obsérvese que la conceptualización de «decenas y unidades» es mucho más complicada en este caso que en la organización de la figura 1(b).

Todas las líneas curvas y rectas de la figura 3 representan relaciones que los niños crean en sus mentes e imponen a los objetos. Al contrario de las presunciones empiricista-asociacionistas sobre las que se basa la instrucción tradicional de las matemáticas, *no se pueden introducir las relaciones en las mentes de los niños desde el exterior*. Las relaciones deben ser creadas por los propios niños a través de su propia actividad mental. Por ende, enseñar la figura 3 a los niños no va a contribuir a que aprendan el sistema de decenas. El lector que desee saber más acerca de la construcción del sistema de decenas sobre el sistema de unidades por los niños, se puede referir a C. Kamii (1986).

2. La enseñanza del procedimiento de izquierda a derecha obstaculiza el que los niños puedan aprender las decenas y las unidades. Incluso los

FIGURA 3



*Los sistemas de decenas y unidades que el niño impone sobre los objetos mostrados en la figura 1(b)*

adultos piensan en treinta y dos como «treinta-y-dos», en vez de «dos-y-treinta». Cuando se alienta a los niños a que inventen su propio procedimiento para resolver

$$\begin{array}{r} 32 \\ +32 \\ \hline \end{array}$$

no es raro encontrarse que utilizan las decenas primero antes de continuar con las unidades.

En la instrucción tradicional, se fuerza a los niños a sumar las unidades primero y a tratar la columna de las decenas como 3 y 3. Por ende no piensan en 3 y 3 como «treinta y treinta»; aunque pensar así les ayude a construir las ideas acerca de las decenas y las unidades.

3. Cuando los niños son libres de aceptar o de rechazar las ideas de los demás, ellos mismos piensan y deciden lo que tiene sentido para ellos. Si un maestro sigue el razonamiento de un niño y escribe «70» y «12» para resolver  $36 + 46$ , por ejemplo, y luego borra el 1 de 12 y cambia el 7 de 70 por 8, los niños se esfuerzan por evaluar los otros tipos de razonamiento. Los niños se sienten libres para elegir la manera que es mejor para ellos, piensan de manera crítica por sí mismos en vez de seguir ciegamente las reglas que se imponen desde fuera.

No enseñamos en el sentido tradicional de decir a los niños cómo se hace algo, reforzando respuestas «correctas» y corrigiendo respuestas «equivocadas». Las investigaciones y la teoría de Piaget han comprobado que ni el número, ni el valor posicional, ni las operaciones pueden enseñarse a través de la transmisión directa desde fuera. Los niños pequeños tienen que construir su propio conocimiento lógico-matemático desde dentro, a través de su propio pensamiento, al reinventar procedimientos estándares por sí mismos.

Los visitantes de nuestra escuela con frecuencia preguntan cómo nos las ingeniamos al comenzar el curso. Esencialmente, el maestro inventa ejerci-

cios para que los niños puedan usar lo que ya saben y sean así capaces de inventar maneras de manejar nuevas situaciones. Por ejemplo, si cambian

$$\begin{array}{r} 8 \\ +7 \\ \hline \end{array}$$

a  $(8 + 2) + 5$ , el maestro puede poner

$$\begin{array}{r} 29 \\ + 6 \\ \hline \end{array}$$

en la pizarra. Algunos niños verán el ejercicio como  $30 + 5$ , mientras que otros lo pueden cambiar en  $20 + (9 + 1) + 5$ . Los juegos que realizan en primer curso, tales como «Decenas» y «Decenas con Barajas» C. Kamii, 1985, pp. 151-53), refuerzan su tendencia natural a pensar en términos de decenas.

A los maestros les resulta difícil y fatigoso tratar de entender el pensamiento de los niños. Pero también puede ser gratificante en la medida en que aquellos niños a los que se ha alentado a buscar el sentido cuando realizan una suma, se encontrarán con una buena base para inventar y desarrollar sus propias vías de resolver ejercicios tales como  $33 - 15$  y  $8 \times 23$ .

En un libro titulado «Young children continue to reinvent arithmetic» (ed. cast. El niño reinventa la aritmética II, en prensa) exponemos con detalle los juegos utilizados.

## Referencias

- BEDNARZ, N. y JANVIER, B. (1982). «The Understanding of Numeration in Primary School.» *Educational Studies in Mathematics*, 13, (febrero), 33-57.
- BURN, J.; GIOSSI, J. M. y HENRIQUES, A. (1984). «A Propos de l'écriture Decimale (Concerning decimal writing)». *Math-ecole* (publicado en Ginebra, Suiza) 23, (112), 2-11.
- KAMII, C. (1986). «Place Value: An Explanation of Its Difficulty and Educational Implications for the Primary Grades». *Journal of Research in Childhood Education*, 1 (agosto), 75-86.
- KAMII, C. *Young Children Continue to Reinvent Arithmetic, 2nd Grade*. Nueva York: Teachers College Press, 1990, Madrid: Visor Aprendizaje (en prep.)
- KAMII, C. (1985). *Young Children Reinvent Arithmetic*. Nueva York: Teachers College Press, 1985 (Trad. cast. Madrid: Visor Aprendizaje, 1986)
- KAMII, M. (1982). *Children's Graphic Representation of Numerical Concepts: A Developmental Study*. Tesis doctoral. Harvard University, 1982. *Dissertation Abstracts International*, 43.
- KAMII, M. (1980). «Place Value: Children's Efforts to Find a Correspondence Between Digits and Numbers of Objects». Ponencia presentada en el Décimo Simposio de la Sociedad de Jean Piaget, Philadelphia.
- MADELL, R. (1985). «Children's Natural Processes». *Arithmetic Teacher*, 32 (marzo 1985), 20-22.
- ROSS, S. (1986). «The Development of Children's Place-Value Numeration Concepts in Grades Two Through Five». Ponencia presentada en la reunión anual de la *American Educational Research Association*, San Francisco.



La enseñanza del valor posicional y de la adición  
en dos columnas. C. Kamii y L. Joseph.  
*CL&E*, 1990, 6, pp. 27-35

**Datos sobre el autor:** Constance Kamii es una conocida defensora de la posibilidad de implementar principios didácticos a partir de la teoría de Jean Piaget. Lleva varios años trabajando en enseñanza preescolar y primaria, y sus últimas publicaciones versan sobre el aprendizaje de las matemáticas elementales.

**Dirección:** The University of Alabama at Birmingham, School of Education, Department of Curriculum and Instruction. UAB, Birmingham, Alabama 35294 USA.

**Artículo original:** «Teaching place value and double-column addition». *Arithmetic Teacher*, 1988, vol. 35. Febrero, 48-52. Traducción de Steven Kozlow.

---

© de todos los artículos. Deberá solicitarse por escrito autorización de CL&E y de los autores para el uso en fofacsíml, fotocopia o cualquier otro medio de reproducción impresa. CL&E se reserva el derecho de interponer acciones legales necesarias en aquellos casos en que se contravenga la ley de derechos de autor.